



Effet Hall quantique fractionnaire dans la bicouche et le puits large

Nicolas Thiébaut Thiebaut

► To cite this version:

Nicolas Thiébaut Thiebaut. Effet Hall quantique fractionnaire dans la bicouche et le puits large. Systèmes mésoscopiques et effet Hall quantique [cond-mat.mes-hall]. Université Paris Sud - Paris XI, 2015. Français. NNT : 2015PA112050 . tel-01180047

HAL Id: tel-01180047

<https://theses.hal.science/tel-01180047>

Submitted on 24 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
ÉCOLE DOCTORALE 564 PHYSIQUE EN ÎLE-DE-FRANCE
LABORATOIRE DE PHYSIQUE DES SOLIDES

DISCIPLINE : PHYSIQUE THÉORIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le Jeudi 2 Avril 2015 par

Nicolas Thiébaut

Effet Hall quantique fractionnaire dans la bicouche et le puits large

Directeur de thèse :	M. Mark-Oliver Goerbig	Chargé de recherche (LPS)
Co-directeur de thèse :	M. Nicolas Regnault	Chargé de recherche (LPA, ENS)
<u>Composition du jury :</u>		
Rapporteurs :	M. René Côté	Professeur titulaire (Université de Sherbrooke)
	M. Philippe Lecheminant	Professeur des universités (LPTM, UCP)
Examineurs :	M. Thierry Jolicœur	Directeur de recherche (LPTMS, UPS)
	Mme. Karyn Le Hur	Directrice de recherche (CPhT, Polytechnique)

Sommaire

L'effet Hall quantique fractionnaire survient lorsqu'un système bidimensionnel d'électrons est porté à la *limite quantique extrême*, c'est-à-dire à une température proche du zéro absolu ($T \sim 30$ mK) et dans un champ magnétique très intense ($B \sim 5-50$ T). Son observation dévoile la stabilisation d'un liquide quantique incompressible caractérisé par des corrélations fortes entre les électrons, telles que le système adopte un comportement intrinsèquement collectif qui ne peut être déduit du comportement individuel des électrons qui le composent. À cause de ces corrélations fortes, la fonction d'onde du liquide quantique est difficile à déterminer de manière exacte ; a donc recours à des fonctions d'onde modèles qui fournissent une description approximative de l'état fondamental du liquide. Ces fonctions modèles sont établies à partir de considérations générales sur les symétries du système, puis leur pertinence est discutée au regard de calculs numériques et par comparaison aux résultats expérimentaux. Le cas du système bidimensionnel d'électrons infiniment fin, idéalisé, a largement été traité dans les études théoriques. Cependant, des systèmes d'électrons de plus en plus épais sont utilisés dans les expériences, car cela permet d'accroître la mobilité électronique, ce qui permet des observations plus fines qui souffrent moins de la présence d'impuretés dans les échantillons. L'extension du système d'électrons dans la direction de confinement influe fortement sur les observations expérimentales. Notamment, dans les puits quantiques à base d'arséniure de gallium, on sait qu'au-delà d'une certaine largeur (~ 50 nm) les électrons peuvent spontanément former une bicouche, ce qui mène à la stabilisation d'un état dit « de Halperin » qui n'est pas observé dans les puits fins, et qui sous-tend l'effet Hall quantique fractionnaire.

La thèse présentée dans ce manuscrit est une étude théorique de l'influence du potentiel de confinement sur les états d'effet Hall quantique fractionnaire, à travers trois modèles de confinement que sont la bicouche, le puits carré et le puits biaisé. Cette étude repose sur deux méthodes complémentaires. La première utilise des calculs de diagonalisation numérique exacte qui permettent de déterminer l'état fondamental du système pour un petit nombre d'électrons, afin d'en étudier les propriétés et d'en déduire le recouvrement avec des états modèles tels que celui de Halperin, et d'autres états issus de la littérature pertinente. La seconde stratégie d'étude repose sur des calculs Monte-Carlo – qui permettent de déterminer l'énergie des états liquides modèles – ainsi que sur des calculs Hartree-Fock grâce auxquels on peut déterminer l'énergie des cristaux de Wigner qui sont en compétition avec les états liquides. La combinaison de ces méthodes permet d'établir des diagrammes de phase théoriques qui peuvent être directement comparés aux observations expérimentales, puisqu'ils incorporent des paramètres pertinents expérimentalement tels que la largeur du potentiel de confinement et son éventuel degré d'asymétrie.

Remerciements

Le travail de doctorat présenté dans ce manuscrit m'a occupé intensément pendant plus de quatre années, qui sont indissociables dans mon souvenir d'une aventure humaine sans pareille. Au sein de la communauté scientifique, j'ai eu la chance de rencontrer des acteurs aux personnalités singulières et riches qui ont stimulé et satisfait ma curiosité. Nombre d'entre eux sont devenus de véritables amis, et sont venus s'ajouter à tous les proches dont la présence est nécessaire à mon épanouissement, scientifique ou non. Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à toutes ces personnes.

En premier lieu je souhaite témoigner ma gratitude à tous les membres du jury. Loin de se contenter de venir à la soutenance, Thierry Jolicœur et Karyn Le Hur ont pris leurs rôles d'examinateurs au sérieux, et m'ont chacun convoqué pour une discussion approfondie avant la présentation orale. Au cours de ces discussions comme au cours de la soutenance, j'ai pu sentir un intérêt réel pour mon travail, et leurs questions et commentaires m'ont permis de mieux comprendre mon sujet. Je suis également reconnaissant envers René Côté et Philippe Lecheminant d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. René a étudié mon manuscrit avec minutie et m'a gratifié de commentaires précieux, tandis que Philippe avait déjà eu le mérite de catalyser ma vocation de physicien avec ses cours de théorie des champs, tant appréciés des étudiants de l'ENS. Je tiens d'ailleurs à adresser des remerciements chaleureux à tous ceux qui sont venus à ma présentation, au pot, et à la soirée qui ont suivi ; merci à vous d'avoir vaincu le RER, la côte et la forêt pour parvenir jusqu'au LPS.

Jusqu'au jour fatidique de la soutenance, j'ai bénéficié d'un environnement scientifique exceptionnel. Le LPS est riche de la diversité de ses thématiques, mais également de la bienveillance et de l'ouverture d'esprit de ses membres. J'ai beaucoup apprécié mes interactions avec Dominique Chandesris, Marie-France Cozic, Marie-France Mariotto, Véronique Thieulart et l'irremplaçable Sophie Tourlet. Celles-ci administrent le LPS avec efficacité, et l'enrichissent de leur bonne humeur. Durant mes trois années en tant que délégué thésard, elles ont toujours montré un réel intérêt pour l'ensemble du LPS, et une volonté sincère de faire du labo un lieu de stimulation pour tous. Je remercie l'ensemble des chercheurs et thésards que j'ai cotoyés, une bande de joyeux lurons en quête de connaissance, avec une mention spéciale à Alexis, Edouard, Yohann, Bastien, Céline, JC et Stéphanie.

Dans ce grand laboratoire qu'est le LPS, le groupe THEO a été ma famille adoptive. Dans cette famille, les quatre fantastiques que sont Jean-Noël, Fred, Mark et Gilles ont le pouvoir de transformer une petite pièce en lieux de débats aussi interminables que passionnants. Jean-Noël transmet une démarche scientifique élégante qu'il expose généreusement chaque fois qu'il est sollicité. Gilles, lui, a hérité du surnom de grand schtroumpf. Loin d'être un sobriquet, ce petit nom témoigne du respect affectueux qu'inspire un homme dont la modestie ne parvient pas à masquer l'érudition. Quand à Fred, il tient une place discrète et il est pourtant indispensable au groupe. Loin d'être seulement celui qui occupe les lieux sans discontinuer, il alimente la réflexion collective de manière ininterrompue. Il nourrit et motive continuellement les étudiants parce qu'il ne déprécie aucune de leurs questions, et se montre toujours disponible pour attaquer un problème théorique à bras-le-corps. J'adresse également des remerciements sincères à Pascal l'infatigable, qu'il s'agisse

de course à pied ou de travail. Il m'a gratifié de nombreux conseils précieux, en matière de science, de sport, et même d'orientation professionnelle, puisque j'ai trouvé mon travail d'après thèse grâce à lui. Merci enfin aux autres chercheurs du groupe THEO, Marc, les deux Marcellos, Ines, Anu, Gilles A., Rik et tous les autres.

Dans la famille du groupe THEO, j'ai passé beaucoup de temps avec les thésards, que ce soit dans le labo, en conférences, en tenue de sport, ou dans les bars parisiens. Mes pensées vont à JR qui est devenu un véritable ami, et m'a accueilli généreusement à maintes reprises dans les soirées, clubs d'escalade, ou sur son canapé. Je salue chaleureusement Clément avec qui j'ai toujours aimé courir, nager, et discuter, et dont j'admire la franchise rare, je salue également Mathias l'artiste peintre des soirées parisiennes, Denis-Michel et sa bonne humeur inépuisable, Doru qui m'a beaucoup instruit, Ameni et son sourire communicatif, Oliver qui m'a fait rêver avec ses robots, et Mircea l'aventurier. Tous mes compagnons du bureau 164 ont également marqué ma mémoire. Ils s'appellent Guanquang, à l'humour aussi que décalé que savoureux, Raphaël, la gentillesse incarnée, Yun-long, le timide qui gagne à être connu, Fred, qui diffuse agréablement sa décontraction dans le bureau, et nous gratifie parfois de quelques pas endiablés, et Arnaud, dont l'arrivée a rendu le bureau plus chaleureux encore, et qui galvanise le groupe comme nul autre. Je souhaite tout le meilleur au jeune Félix qui a fait un passage remarqué et m'a torturé l'esprit avec ses énigmes infernales. Je salue et je remercie également Vardan, Seb, Olesia, et Sergueï qui sont des compagnons hors pair. Je garderai de très bons souvenirs de cette période et j'espère vous revoir bientôt ! J'adresse aussi une pensée à mes frères et sœurs de thèse, Raphaël, Antoine et Cécile, et je tiens à remercier Zlatko car les quelques discussions que j'ai eues avec lui m'ont beaucoup appris.

Mon activité de recherche, en plus du temps passé au labo, dans les cafés et bibliothèques, a été ponctuée d'inoubliables conférences. Le pouvoir de stimulation de ces rassemblements est énorme, et chacun d'entre eux est un concentré de vie, de science et de camaraderie. Je salue tous les acolytes des Houches, de Chamonix, de Cargèse et de Panama City Beach. Merci Boris, Caro, Binou, Fabien, Chloé, Jian, Lloyd, Daniel, Amanda, et tous les autres pour m'avoir instruit, amusé, nourri et logé.

Ma gratitude la plus profonde va bien sûr à mes deux directeurs de thèse, Nicolas et Mark. Après avoir fréquenté ces bons vivants quelques années il m'est impossible d'associer la science à l'austérité, ou l'intelligence à la froideur. Nicolas m'a guidé à distance, et alors qu'il travaillait intensivement sur des sujets ambitieux, il toujours a pris le temps de mettre les mains dans le cambouis de mes modestes codes. Je le remercie aussi pour sa franchise, car il a toujours eu le courage de soulever les problèmes plutôt que de me laisser tourner en rond ; ainsi je savais qu'il était sincère lorsqu'il m'encourageait, et j'appréciais d'autant plus ses compliments. Aussi, en dehors du travail j'ai toujours senti qu'il se préoccupait de moi et ses étudiants, bien au-delà des seules considérations scientifiques.

Mon autre directeur de thèse est une personne qui marque généralement les esprits par sa volubilité et sa culture. Je pense que ceux qui l'ont rencontré seront d'accord pour dire qu'il excelle en matière de science et de camaraderie. Après avoir passé quatre ans avec lui presque quotidiennement je l'ai toujours vu en éveil et attentif aux autres. Plus qu'un directeur de thèse il est devenu un mentor et un ami, et m'a instruit sur des sujets divers et variés que la musique, l'histoire et la philosophie. Il a aussi su m'encadrer sérieusement sur mon sujet, et m'aider à surmonter les difficultés, je lui suis extrêmement reconnaissant.

Enfin, je tiens à profiter de ces quelques lignes pour saluer mes proches et les remercier pour leur présence. Je remercie d'abord mes compagnons de toujours avec lesquels j'ai grandi, et que j'ai toujours plaisir à revoir : Pierrot, Victor, Tu Anh, Benj, Dédé, Ju, Clément, Momo, et tout l'ASM. Merci à Paul, compagnon de rédaction, de musique et de foot, qui était un camarade génial pendant toute la fin de ma rédaction de thèse, et qui l'est encore. Merci aussi à Cécilia qui venait nous communiquer sa bonne humeur au sortir de la bibliothèque. J'ai une pensée pour Amine, qui m'a fait très plaisir en venant me voir après quelques années sans contacts. Je dois aussi rendre justice ici aux quelques professeurs qui m'ont marqué et inoculé le goût de la physique, Matthieu Langer, Werner Krauth, Jean-Noël, et Stéphane Belin.

Durant les quelques derniers mois de ma thèse, une jolie danseuse m'a irradié de bonheur ; après une longue journée d'écriture elle me délassait d'un éclat de rire, et m'envoûtait d'un regard. Elle partage et embellit maintenant ma vie et sa créativité nourrit sans cesse la mienne, merci Anthéa.

Finalement, je témoigne ma plus grande reconnaissance à mes sœurs et à mes parents, qui m'ont appris à trouver ma voie sans jamais m'imposer d'orientation, et m'ont invariablement soutenu et guidé dans mes choix.

Table des matières

Sommaire	1
Introduction	1
1 Système bidimensionnel d'électrons sous champ magnétique	5
1.1 Réalisations expérimentales	5
1.1.1 Hétérostructures semi-conductrices	6
1.1.2 Système bicouche	7
1.1.3 Puits large	8
1.2 Effet Hall classique et effet Hall quantique entier	12
1.2.1 Effet Hall classique	12
1.2.2 Quantification de Landau	13
1.2.3 Effet Hall quantique entier	20
1.3 Effet Hall quantique fractionnaire	26
1.3.1 Le problème à deux corps	28
1.3.2 Fonction d'onde de Laughlin	30
1.3.3 Le rôle du spin dans l'effet Hall quantique fractionnaire	34
2 Fonctions modèles pour l'effet Hall quantique fractionnaire	37
2.1 Préliminaires	38
2.1.1 Hamiltonien d'interaction projeté dans un seul niveau de Landau	38
2.1.2 Le « shift » topologique	40
2.2 États de Halperin	41
2.3 Liquide de Fermi de fermions composites et états appariés	44
2.3.1 Fermions composites	44
2.3.2 Fermions composites indépendants : Liquide de Fermi de fermions composites	46
2.3.3 Appariement triplet des fermions composites : état pfaffien de Moore et Read	47
2.3.4 État apparié singulet de Haldane et Rezayi	50
2.4 Cristaux de Wigner	52
2.4.1 Cristaux de Wigner sous champ magnétique	52
2.4.2 Cristaux de Wigner alternés dans une bicouche	58
2.4.3 Niveaux de Landau supérieurs : cristaux de bulles et de rubans	61
2.4.4 Rubans alternés	64
2.5 Résumé des phases en compétition	65
3 Phases corrélées dans une bicouche	67
3.1 Cristaux de Wigner dans la bicouche	68
3.1.1 Hamiltonien en termes d'opérateurs densité de (pseudo)spin	68
3.1.2 Terme tunnel	70

3.1.3	Diagramme de phase des cristaux électroniques dans le plus bas niveau de Landau .	70
3.2	Diagrammes de phase de la bicouche dans le plus bas niveau de Landau	72
3.2.1	Demi-remplissage de la bicouche : état (331) et liquides de Fermi de fermions composites	72
3.2.2	La bicouche à $\nu = 1/3$: effet Hall quantiques mono- et multicomposantes	73
3.2.3	La bicouche à $\nu = 1/4$: un diagramme de phase riche	75
3.3	Second niveau de Landau	76
3.3.1	$\nu = 5/2$: compétition entre l'état pfaffien et l'état (331)	79
3.3.2	$\nu = 7/3$: Laughlin dans le second niveau de Landau	81
3.3.3	$\nu = 9/4$: le règne des états métalliques	82
3.4	Bicouche biaisée	83
4	États électroniques corrélés dans le puits large symétrique	87
4.1	Hamiltonien d'interaction et bicouche effective dans le puits large	88
4.1.1	Rappel du modèle	88
4.1.2	Bicouche effective et états de Halperin « tournés »	91
4.2	Cristaux électroniques dans le puits large	94
4.2.1	Cristaux monocomposantes	95
4.2.2	Cristaux de bicouche effective	96
4.2.3	Diagramme de phase des cristaux	102
4.3	Diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$	104
4.3.1	Énergie des liquides corrélés	104
4.3.2	Diagramme de phase complet	107
4.4	Puits large symétrique et second niveau de Landau	109
5	Effet Hall quantique fractionnaire dans un puits quantique asymétrique	113
5.1	Asymétrie du potentiel de confinement et rotation des états modèles dans l'espace de pseudo-spin	115
5.1.1	Les sous-bandes du puits quantique biaisé	115
5.1.2	Fonctions de Halperin tournées d'un angle arbitraire	116
5.1.3	Rotation des états monocomposantes dans l'espace de pseudospin	118
5.2	Diagramme de phase du puits biaisé à $\nu = 1/2$ et $\nu = 5/2$	119
5.2.1	Plus bas niveau de Landau : $\nu = 1/2$	121
5.2.2	Puits biaisé et modèle de bicouche effective	127
5.2.3	Comparaison avec une valeur différente du champ magnétique	134
5.2.4	Second niveau de Landau : $\nu = 5/2$	137
5.3	Stabilité de l'état de Halperin (532) dans le puits biaisé	139
	Conclusion	141
A	Géométrie sphérique	145
A.1	Coordonnées sphériques et spinorielles	145
A.1.1	Coordonnées spinorielles	146
A.1.2	Distance de corde	146
A.2	Projection stéréographique	147
A.3	Monopôle magnétique et quantification du flux	147
A.4	Dynamique d'une particule chargée sur la sphère	148
A.5	Pseudopotentiels	150
B	Modèle du « Jellium »	151
B.1	Hamiltonien d'interaction	151
B.1.1	Approximation du « Jellium »	152

C	Méthode du Monte-Carlo variationnel pour le calcul des énergies des états de Hall	155
C.1	Algorithme de Metropolis	156
C.2	Interactions effectives	156
C.2.1	Bicouche dans le 1NL	157
C.2.2	Puits quantique	157
C.3	Énergie de référence	158
C.3.1	Bicouche	158
C.3.2	Interaction effective gaussienne	159
C.3.3	Interaction effective polynomiale	159
D	Corrections à l'énergie du cristal de Wigner dues au recouvrement des états voisins	161
D.1	Préliminaire : L'état à deux électrons	161
D.2	Généralisation à N -corps	163
E	Glossaire	167
F	Formulaire	169

Liste des tableaux

1.1	Grandeurs caractéristiques des puits quantiques à base d'Arséniure de Gallium.	7
1.2	Symétries des systèmes à deux composantes : spin, bicouche, puits large symétrique et asymétrique	11
1.3	Hamiltonien cinétique sous champ magnétique et oscillateur harmonique	15
1.4	Pseudopotentiels de l'interaction de Coulomb dans les deux plus bas niveaux de Landau . . .	30
2.1	Les différents états appariés	51
2.2	Caractéristiques des fonctions modèles	65
2.3	Énergies pour l'interaction de Coulomb pure	66
3.1	Énergie du liquide de Fermi de fermions composites à différents facteurs de remplissage . . .	74
4.1	Pseudopotentiels de l'interaction modèle des états de Halperin et rotation dans l'espace de pseudospin.	93
5.1	Propriétés des états modèles considérés.	121
5.2	Dimensions des sous-espaces $L_z = 0$ pour $N = 6, 8, 10$ et 12 à demi-remplissage.	121
E.1	Glossaire	167

Table des figures

1.1	Le puits quantique à base d'Arséniure de Gallium	6
1.2	Dispositif expérimental de la bicouche.	7
1.3	Bicouche et pseudospin	8
1.4	Potentiel de confinement : puits quantique biaisé	8
1.5	Potentiel de confinement triangulaire	9
1.6	Modèle du puits carré infini pour le puits large symétrique	9
1.7	Bicouches effectives dans un puits large.	11
1.8	Expérience de Hall	12
1.9	Orbite cyclotron dans deux référentiels.	13
1.10	Densité de probabilité des orbites de Landau dans la jauge symétrique en fonction du rayon r	18
1.11	Niveaux et jauge de Landau.	19
1.12	Densité de probabilité des orbites de Landau dans le plan xy , dans la jauge symétrique	21
1.13	Effet Hall quantique entier.	22
1.14	Niveaux de Landau et potentiel de confinement.	23
1.15	Lignes équipotentielle en présence de désordre.	24
1.16	Géométrie de Corbino.	26
1.17	Insertion d'un quantum de flux dans la géométrie de Corbino.	27
1.18	Niveaux de Landau entièrement remplis, et partiellement remplis	27
1.19	Interaction de Coulomb projetée.	30
1.20	Recouvrement de l'état de Laughlin avec l'état fondamental du puits large en fonction de la largeur w	32
1.21	Fonction de corrélation de paire de la fonction d'onde de Laughlin.	33
2.1	Potentiel de Coulomb projeté dans les plus bas niveaux de Landau	39
2.2	Fonction de corrélation de l'état de Halperin (331)	42
2.3	Réseaux de Bravais bidimensionnels.	53
2.4	Maille élémentaire du réseau rectangulaire.	53
2.5	Maille élémentaire du réseau triangulaire et vecteurs de base du réseau réciproque.	54
2.6	Maille élémentaire du réseau rectangulaire centré ou « rhombique ».	54
2.7	Énergie du cristal de Wigner triangulaire corrélé.	57
2.8	Énergie des cristaux de Wigner monocomposantes	58
2.9	Réseaux alternés	59
2.10	Densité du cristal de rubans dans le plus bas NL	63
2.11	Densité de centre-guide du cristal de rubans alterné dans la bicouche	64
3.1	Bicouche et pseudospin	68
3.2	Diagramme de phase de la bicouche	71
3.3	Energies de cohésion des cristaux de Wigner dans la bicouche à $\nu = 1/2$	71
3.4	Energies de cohésion dans la bicouche à $\nu = 1/2$ et diagramme de phase correspondant	73

3.5	Énergie de l'état de Laughlin et de l'état (333) dans la bicouche	75
3.6	Energies de cohésion dans la bicouche à $\nu = 1/3$ et diagramme de phase correspondant	76
3.7	Energies de cohésion dans la bicouche à $\nu = 1/4$ et diagramme de phase	77
3.8	Diagrammes de phase de la bicouche à $\nu = 1/2, 1/3$ et $1/4$	77
3.9	Ecart relatifs des pseudopotentiels du second niveau de Landau avec ceux de l'interaction effective gaussienne	79
3.10	Energies de cohésion des phases cristallines dans la bicouche à $\nu = 5/2$	80
3.11	Energies de cohésion de la bicouche à $\nu = 5/2$, et diagramme de phase associé	80
3.12	Energies de cohésion des phases cristallines dans la bicouche à $\nu = 7/3$	81
3.13	Energies de cohésion dans la bicouche à $\nu = 7/3$, et diagramme de phase associé	82
3.14	Énergies et diagramme de phase de la bicouche dans le second niveau de Landau à $\nu = 9/4$	83
3.15	Dispositif expérimental de la bicouche biaisée	84
3.16	Polarisation de la bicouche biaisée	85
3.17	Recouvrement de (532) avec l'état fondamental dans la bicouche biaisée	86
3.18	Recouvrements de (532) avec l'état fondamental dans la bicouche biaisée dans la région de stabilité	86
4.1	États propres du puits carré	89
4.2	Pseudopotentiels des deux plus basses sous-bandes du puits large	91
4.3	Fonctions d'onde de sous-bandes et bicouche effective	91
4.4	Bicouche effective et rotation de pseudospin dans le puits large symétrique	92
4.5	Recouvrement de (331) avec l'état fondamental du puits large en fonction de l'angle de rotation dans l'espace de pseudospin.	94
4.6	Energies des cristaux de Wigner monocomposantes à $\nu = 1/2$ dans le puits large	97
4.7	Valeurs optimales α_0 des paramètres de dilatation des cristaux rectangulaires dans les trois plus basses sous-bandes du puits large	98
4.8	Profil de densité du cristal de Wigner rectangulaire	99
4.9	Énergie des cristaux alternés dans la bicouche effective à $\nu = 1/2$	100
4.10	Différences des énergies de référence des différentes sous-bandes à $\nu = 1/2$	102
4.11	Diagramme de phase des cristaux de Wigner dans le puits large à $\nu = 1/2$	103
4.12	Diagramme de phase expérimental du puits large à $\nu = 1/2$.	104
4.13	Exemples d'extrapolations des énergies de cohésion obtenues par calcul Monte-Carlo	105
4.14	Différence d'énergie du pfaffien et du liquide de Fermi de fermions composite dans les deux plus basses sous-bandes.	106
4.15	Différences d'énergie des états liquides dans la bicouche effective du puits large à $\nu = 1/2$.	107
4.16	Diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$	108
4.17	Comparaison des diagrammes de phase théoriques et expérimentaux	109
4.18	Comparaison de l'énergie des phases à deux composantes, à $\nu = 5/2$ dans le puits large	110
4.19	Diagramme de phase du puits large à $\nu = 5/2$	111
5.1	Dispositif expérimental du puits large asymétrique et potentiel de confinement associé	113
5.2	Fonctions d'onde des sous-bandes du puits quantique biaisé	115
5.3	Gap de sous-bande du puits quantique biaisé	116
5.4	Recouvrement de (331) avec l'état fondamental du puits quantique biaisé en fonction de l'angle de rotation dans l'espace de pseudospin.	117
5.5	Rotation du pseudospin dans le puits quantique biaisé	118
5.6	Recouvrement de l'état pfaffien avec l'état fondamental du puits quantique biaisé en fonction de l'angle de rotation dans l'espace de pseudospin.	119
5.7	Combinaison optimales des fonctions d'onde de sous-bande pour l'état pfaffien à $w/l_B = 8$ et $V = 1$	120
5.8	Moment cinétique de l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 1/2$.	122

5.9	Norme et composante suivant z du pseudospin à $\nu = 1/2$	123
5.10	Recouvrement des états modèles pertinents avec l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 1/2$	124
5.11	Gap énergétique neutre dans le puits quantique biaisé à $\nu = 1/2$	125
5.12	Recouvrement optimisé de l'état (331) avec l'état fondamental en fonction du biais à largeur fixe.	126
5.13	Calcul Monte-Carlo des énergies des états modèles dans la limite du puits symétrique	127
5.14	Comparaison de l'angle de polarisation de l'état fondamental et de l'angle de recouvrement maximal avec l'état (331).	130
5.15	Profil de densité suivant z de l'état fondamental du puits large symétrique, pour $w = 10 l_B$	131
5.16	Profil de densité suivant z de l'état fondamental du puits biaisé, pour $w = 10 l_B$ et $V = e^2/4\pi\epsilon l_B$	132
5.17	Angle θ_{bic} pour lequel le hamiltonien du puits biaisé approche celui de la bicouche	135
5.18	Norme et composante suivant z du pseudospin à $\nu = 1/2$ pour $B = 7 \text{ T}$	135
5.19	L'angle de polarisation pour $B = 7 \text{ T}$	136
5.20	Pseudospin et moment cinétique de l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 5/2$	137
5.21	Recouvrement des états modèles pertinents avec l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 5/2$	138
5.22	Norme et composante suivant z du pseudospin à $\nu = 4/11$	140
5.23	Recouvrement de l'état (532) avec l'état fondamental et le premier état excité du puits quantique biaisé.	140
5.24	Gaps du puits biaisé à $\nu = 4/11$ pour $N = 6$	141
A.1	Système de coordonnées sphériques.	145
A.2	Projection stéréographique.	147
D.1	Corrections à la densité du cristal de Wigner dues au recouvrement des états voisins	163
D.2	Maille élémentaire des réseaux rectangulaire et rhombique.	164

Introduction

La thèse présentée dans ce manuscrit s'inscrit dans le cadre de la physique de la matière condensée. Ce domaine aujourd'hui très vaste est né de la rencontre entre la physique des solides et la physique des liquides dans les années soixante. À cette époque, le lien entre ces deux sujets était suggéré par le comportement liquide des électrons immanents à certains solides, comme par exemple le liquide de Fermi formé par les électrons de conduction dans les métaux. Ce rapprochement entre liquides et solides a également d'autres fondements, tels que la similitude entre la transition superfluide dans l'hélium liquide et la transition supraconductrice dans les solides supraconducteurs; elles sont toutes deux induites par un phénomène de condensation – dite « de Bose-Einstein » – au niveau microscopique. Le champ d'investigation de la physique de la matière condensée s'est depuis élargi; aux phases solides et liquides se sont ajoutées des phases plus exotiques, telles que les cristaux liquides, les matériaux (anti-)ferromagnétiques ou encore les condensats de Bose-Einstein réalisés dans les atomes froids. Cette profusion d'objets d'études fait de cette branche de la physique un des domaines les plus actifs de la recherche scientifique actuelle.

Certains sujets de la physique de la matière condensée retiennent particulièrement l'attention de la communauté scientifique. C'est le cas des phases fortement corrélées, comme celles qui sous-tendent la supraconductivité à haute température critique, le magnétisme itinérant, ou encore les liquides de spin. Ces phases accaparent la réflexion des physiciens depuis plusieurs décennies, car la compréhension de leurs propriétés et de leurs conditions d'observation est épineuse. En effet, les phases fortement corrélées sont caractérisées par un comportement collectif qui diffère fondamentalement du comportement individuel des particules sous-jacentes. Leur étude ne peut donc se baser exclusivement sur le comportement individuel des constituants du solide, et des descriptions théoriques nouvelles sont nécessaires.

Plus récemment, les phases topologiques en dimension réduite ont généré un intérêt très important, en témoignent l'omniprésence du graphène dans les médias scientifiques depuis 2005, et l'essor non moins récent des isolants topologiques. Contrairement aux solides étudiés jusqu'alors, les propriétés de ces matériaux ne découlent pas uniquement de la structure de leur spectre énergétique, et la connaissance de la topologie de l'espace des états correspondant s'avère nécessaire.

L'effet Hall quantique fractionnaire, qui est le sujet de ce manuscrit, est la manifestation d'une phase qui est à la fois fortement corrélée et topologique. Cette ubiquité, qu'il partage avec les liquides de spin mentionnés plus haut, lui octroie un statut privilégié en tant qu'objet d'étude. L'effet Hall quantique fractionnaire témoigne à lui seul de l'enchevêtrement incontournable de la physique des solides et de celle des liquides; il peut être observé dans des semi-conducteurs, c'est-à-dire des solides conventionnels, néanmoins il est dû à la formation d'un liquide quantique incompressible par les électrons du solide. Il apparaît dans les systèmes bidimensionnels d'électrons faiblement désordonnés, en présence d'un champ magnétique intense et à très basse température. De plus ces liquides quantiques s'avèrent être en compétition avec des solides électroniques tels que le cristal de Wigner ou des cristaux plus exotiques encore.

Depuis son observation en 1982 par Daniel Tsui et ses collaborateurs [TSG82], les descriptions théoriques de l'effet Hall quantique fractionnaire ont prédit des phénomènes physiques nouveaux, dont certains at-

tendent toujours une confirmation expérimentale. Le travail théorique pionnier de Robert Laughlin [Lau83a] a permis de comprendre l'essence du phénomène seulement un an après sa découverte, en suggérant la formation d'un liquide quantique incompressible. Laughlin prédit la possibilité d'exciter des quasi-particules qui portent seulement une fraction de la charge élémentaire e des objets interagissants dont cette phase émerge, en comprimant faiblement le liquide. Cette prédiction a connu une confirmation expérimentale en 1997 [SGJE97] qui entérina la nature singulière du liquide de Laughlin.

Depuis sa découverte, l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire est régulièrement nourrie de nouvelles observations. L'expérience historique en rapportait la découverte à $\nu = 1/3$, le facteur de remplissage ν étant le rapport entre la densité électronique n et la densité de flux magnétique n_B . Depuis, il a été observé à de très nombreux facteurs de remplissage ($\nu = 1/3, 1/5, 2/5, 5/2, \dots$), et ce fait appelle des généralisations de la théorie de Laughlin. La première généralisation vint de Bertrand Halperin [Hal83b], qui proposa un équivalent du liquide Laughlin – qui décrit des fermions sans spin – adapté au cas où les électrons ont un degré de liberté interne. Ensuite, en 1989 Jainendra Jain [Jai89] introduisit une particule effective, le fermion composite, qui s'habille d'une partie du flux magnétique et permet de rendre compte de l'effet Hall quantique fractionnaire à de très nombreuses fractions. Pour terminer cette liste non-exhaustive, je mentionnerai le liquide de Moore et Read [MR91]. Celui-ci est un candidat naturel pour la description de l'effet Hall quantique fractionnaire observé à $\nu = 5/2$ [WES⁺87], et il possède un statut particulier par rapport aux autres liquides de Hall mentionnés jusqu'ici. Certaines de ses quasi-particules sont des fermions de Majorana ; non contentes de ne porter qu'une fraction $1/4$ de la charge élémentaire, elles ont une statistique non abélienne : l'échange des quasi-particules produit un état qui dépend de l'ordre dans lequel les échanges sont opérés. Cette propriété d'échange inhabituelle suggère des applications attrayantes en calcul quantique protégé par la topologie, et donc insensible aux perturbations locales. Ces quasi-particules nourrissent un effort important de la part des expérimentateurs, qui tentent d'obtenir une preuve de leur observation et de les manipuler. Les conditions de stabilité de ce liquide de Moore et Read sont l'un des leitmotifs de ma thèse.

Toutes les théories mentionnées dans le paragraphe précédent offrent des descriptions pertinentes et élégantes des observations expérimentales. Néanmoins elles sont formulées dans un cadre idéalisé, notamment car elles décrivent toutes des systèmes d'électrons en deux dimensions d'espace. En réalité le système d'électrons n'est pas réellement bidimensionnel. Afin d'augmenter la mobilité électronique, les expérimentateurs ont généralement recours au dispositif du puits large, dans lequel l'incarnation du système bidimensionnel d'électrons a une extension de l'ordre de cent nanomètres. Dans cette situation, l'interaction effective entre les électrons est réduite du fait de l'extension dans la direction du potentiel de confinement. De plus, alors que seul la plus basse sous-bande du potentiel de confinement est peuplée dans un système d'électrons infiniment fin, dans un système d'épaisseur finie les sous-bandes excitées peuvent jouer un rôle.

La description des expériences nécessite donc un travail de modélisation, car, alors que les théories en place fournissent une description pertinente de l'effet Hall quantique fractionnaire dans un système idéalisé, l'ontologie potentielle des états théoriques ne peut être discutée que dans le cadre d'une modélisation réaliste du potentiel de confinement. En pratique, certaines observations trouvent potentiellement une interprétation adéquate dans plusieurs théories, et il convient de les discriminer dans les situations expérimentales, en ayant recours à cette description réaliste de la largeur du potentiel de confinement et des sous-bandes correspondantes. Mon travail est une application concrète des théories existantes sur l'effet Hall quantique fractionnaire, au dispositif du puits large. Il a pour objectif de trancher la compétition entre les différents états potentiels, et il s'inscrit dans le débat sur la nature des états observés dans les expériences.

Pour discuter la nature de l'état fondamental du système dans les conditions expérimentales, le calcul numérique est un allié précieux. Il est impossible d'aborder une phase fortement corrélée, comme celles responsables de l'effet Hall quantique fractionnaire, à partir du mouvement individuel des électrons. Autrement dit les méthodes perturbatives échouent dans l'étude des phases fortement corrélées. Pour cette raison, la diagonalisation exacte a une place importante dans ce domaine. Cette méthode consiste à diagonaliser le hamiltonien du système par ordinateur, pour un petit nombre $N \sim 10$ d'électrons, et à extraire l'état fon-

damental ainsi que, éventuellement, les premiers états excités. Pour réaliser cette diagonalisation numérique il est nécessaire de tronquer l'espace de Hilbert afin qu'il ait une dimension finie. En présence du champ magnétique le spectre à un corps se répartit en niveaux équidistants hautement dégénérés appelés niveaux de Landau. Dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire tous les électrons pertinents appartiennent au même niveau de Landau, et pour obtenir un espace de Hilbert de dimension finie on néglige simplement les autres niveaux de Landau. L'espace de Hilbert n'est pas encore de dimension finie pour l'instant. Dans la mesure où l'on considère un petit nombre d'électrons, les bords du système auront une influence exagérée dans notre description. Pour éviter cet artefact on remplace le problème d'électrons se déplaçant dans un plan en champ magnétique par le problème, équivalent, d'électrons sur une sphère entourant un monopole magnétique. On s'est ainsi débarrassé des bords, et l'on obtient bel et bien un espace de Hilbert de dimension finie.

En plus de la diagonalisation exacte, j'utiliserai abondamment la méthode du Monte-Carlo variationnel par la suite. Celle-ci permet de déterminer l'énergie d'un état donné, dont on connaît l'expression dans l'espace des positions. Dans la mesure où les états d'effet Hall quantique fractionnaire sont généralement mieux connus à travers leur expression dans l'espace réel, cette méthode me permettra de comparer les énergies de différentes phases. Elle présente l'avantage de donner des énergies extrêmement précises, comme en témoignent la concordance des résultats publiés par des auteurs différents, ceci grâce aux tailles importantes qu'elle permet d'atteindre (de l'ordre de la centaine d'électrons). Les états liquides qui nous intéressent, et dont l'énergie est déterminée par méthode Monte-Carlo, sont en compétition avec des phases solides électroniques, des états cristallins de Wigner ou des ondes de densité de charge. Les énergies de ces dernières offrent l'avantage de pouvoir être déterminées analytiquement, par la méthode Hartree-Fock. La combinaison du calcul Hartree-Fock des énergies des états cristallins et du calcul Monte-Carlo des énergies des états liquides forme la méthode variationnelle. Elle est très précise, cependant elle ne permet que de comparer des phases préalablement connues. À l'inverse, la diagonalisation exacte donne l'état fondamental du hamiltonien d'interaction, dont il faut extraire les propriétés après coup, telles que le recouvrement avec les différents états modèles. Ainsi elle présente l'avantage de ne pas reposer sur le choix initial des états modèles, en revanche les limitations numériques nous restreignent à des systèmes dont la petite taille peut induire des biais importants. Pour toutes ces raisons, j'utiliserai ces deux méthodes conjointement aussi souvent que possible, mais dans certaines situations l'une des deux méthodes est plus adaptée, ou plus simple à implémenter que l'autre, et je n'aurai donc pas toujours le luxe de pouvoir comparer les résultats obtenus par les deux voies ainsi offertes.

Avant la description de l'effet Hall quantique fractionnaire dans le puits large, je présenterai une étude dans le dispositif de la bicouche. Celui-ci est formé des deux copies du système bidimensionnel d'électrons séparées d'une distance d . Il a été montré expérimentalement que ce système permet l'observation de l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 1/2$ [EBP⁺92], alors que celui-ci n'est pas observé dans les systèmes à une seule composante. Ma motivation pour l'étude de la bicouche est double : premièrement, ce dispositif a un intérêt expérimental direct non seulement pour l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire, mais de plus un phénomène de condensation excitonique y a été observé [SEPW00, EPW90, KEPW04, TSH04]. Deuxièmement, il sert souvent de description effective pour le puits large. Dans cette description, on suppose que dans les puits larges les électrons peuvent se séparer en deux couches situées proches des extrémités du potentiel de confinement, formant ainsi une bicouche effective. J'établirai tout d'abord un diagramme de phase exhaustif de la bicouche, pour discuter plus tard la validité de la description en terme de bicouche effective par comparaison avec les résultats pour le puits large.

Dans un deuxième temps, je m'intéresserai au puits large symétrique en le modélisant par un puits carré infini. Cette modélisation fournit une très bonne approximation de la réalisation la plus répandue et polyvalente du système bidimensionnel d'électrons, le puits quantique à base d'arséniure de gallium. En retenant les deux plus basses sous-bandes – symétrique et anti-symétrique – du puits carré, on obtient un système à deux composantes. En pratique, dans la limite des puits fins le gap de sous-bande est important et sépare les deux plus basses sous-bande ; seule la plus basse sous-bande est effectivement peuplée. On

retrouve ainsi la limite naturelle du puits fin. Cependant, en dehors de ce cas limite les deux plus basses sous-bandes s'avèrent pertinentes, voire plus. Dans le cadre de ce modèle, je discuterai le diagramme de phase du puits large en fonction de la largeur, qui détermine le gap de sous-bande, et du champ magnétique, qui impacte l'intensité du potentiel d'interaction effectif. Ce diagramme de phase, par comparaison aux nombreux résultats expérimentaux sur l'effet Hall quantique fractionnaire dans les puits larges, permet une identification spéculative des phases observées. En pratique, je me concentrerai sur le demi-remplissage des deux plus bas niveaux de Landau. Le demi-remplissage est abondamment étudié parce qu'il correspond au facteur de remplissage décrit par le célèbre liquide de Moore et Read évoqué précédemment. De plus, à ce facteur de remplissage la zoologie des états potentiellement pertinents pour la description de l'état fondamental est très riche. Dans un puits infiniment fin à demi-remplissage, le système forme une mer de Fermi de fermions composite dans le plus bas niveau de Landau, et un état de Moore et Read dans le second. La possibilité de stabiliser l'état pfaffien dans un puits large dans le plus bas niveau de Landau a déjà été évoquée [SGCS09], et n'a pas été tranchée. À ce facteur de remplissage, l'état de Moore et Read est en compétition avec la mer de Fermi de fermions composites, avec l'état de Halperin (331) à deux composantes, et avec des états cristallins isolants. La compétition énergétique entre ces états, très fine, sera abondamment discutée dans le quatrième chapitre.

Le dernier sujet d'étude est une généralisation du précédent au cas du puits large en présence d'un biais. Celui-ci a pour vocation de modéliser une asymétrie résiduelle, ou induite, dans le potentiel de confinement. Il consiste en un puits carré infini auquel une pente linéaire est ajoutée. Le rôle de l'asymétrie a été étudié expérimentalement [SGS09, SGCS09], et une observation surprenante a été relevée dans la seconde de ces références. Alors que la présence d'un biais est généralement considérée comme une entrave à la stabilisation des états d'effet Hall quantique fractionnaire, les auteurs de la référence [SGCS09] ont pu induire l'effet en question à $\nu = 1/2$ par l'application d'un biais non-nul, dans un échantillon dont il était absent dans la situation symétrique. La nature de l'état quantique sous-jacent à l'observation de l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 1/2$, dans un puits quantique biaisé, est le premier sujet d'étude du chapitre cinq.

Le modèle du puits biaisé me permettra également d'étudier un autre état de Hall quantique fractionnaire, énigmatique, observé à $\nu = 4/11$ dans un puits large. À ce facteur de remplissage, une interprétation en termes d'effet Hall quantique fractionnaire de fermions composites est possible. L'état correspondant a déjà été proposé par plusieurs auteurs [CJ04, GLMS04]. Cependant une description alternative est possible. Celle-ci suppose la formation d'une bicouche effective, et la stabilisation d'un état de Halperin asymétrique (532). La stabilisation des états de Halperin asymétriques est une hypothèse qui a peu été explorée, et sa pertinence pour la description de l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 4/11$ est discutée dans la seconde partie du dernier chapitre.

Le manuscrit est structuré comme suit. Des question de goût m'ont conduit à écrire une introduction extensive, qui occupe les deux premiers chapitres. Le premier est une introduction générale à l'effet Hall quantique fractionnaire, tandis que le second présente l'intégralité des états modèles utilisés dans la suite du manuscrit. Les chapitres trois à cinq présente les résultats qui ont émanés de mon travail de thèse. Le troisième traite du système bicouche, le quatrième consiste en l'étude du puits large symétrique à demi-remplissage, et le cinquième porte sur le puits biaisé. Toutes ces études sont menées dans les deux plus bas niveaux de Landau.

Chapitre 1

Système bidimensionnel d'électrons sous champ magnétique

Dans ce chapitre introductif le système bidimensionnel d'électrons (SBE) sous champ magnétique est présenté. Ses réalisations expérimentales ainsi que les outils théoriques nécessaires à son étude sont exposés. Les conventions de notation, de référence d'énergie ainsi que les unités sont fixées ici et peuvent également être retrouvées en annexe.

1.1 Réalisations expérimentales

Le SBE possède aujourd'hui de nombreuses réalisations que l'on peut regrouper en plusieurs catégories. La première, plus récemment découverte, comporte le graphène et les matériaux « monocouches » analogues. Ces matériaux sont intrinsèquement bidimensionnels dans la mesure où l'épaisseur de ces cristaux bidimensionnels est typiquement celle d'un seul atome ou celle de la maille élémentaire, et leur bande de conduction constitue donc une réalisation naturelle du SBE. Il y a quelques spécificités qui distinguent les matériaux intrinsèquement bidimensionnels des systèmes électroniques plus conventionnels. Notamment, dans le cas du graphène la relation de dispersion linéaire et la chiralité des états de bords induit des propriétés inhabituelles. Ces systèmes ne seront pas considérés dans ce manuscrit, néanmoins certains des résultats présentés sont communs à tous les SBEs indépendamment de leur nature. Notons par exemple que la relation de dispersion d'un matériau n'est plus pertinente en présence d'un champ magnétique intense, car celui-ci gèle l'énergie cinétique. Les spécificités du matériau n'apparaissent alors plus qu'à travers la masse effective qui donne le gap cyclotron, la constante diélectrique qui traduit l'intensité de l'interaction coulombienne, et le nombre de degrés de liberté (par exemple si le matériau révèle une dégénérescence de vallée à basse énergie).

La seconde catégorie de matériaux qui permettent la réalisation du SBE est constituée des interfaces dans les dispositifs électroniques. Les deux exemples les plus célèbres sont l'interface entre l'isolant et le semi-conducteur d'un transistor à effet de champ, et l'hétérostructure semi-conductrice qui sera décrite par la suite. Cette seconde catégorie de SBEs présente l'avantage d'une grande modularité et, au fil des améliorations technologiques, a permis d'atteindre des mobilités électroniques jusque-là inespérées.

À titre informatif, mentionnons également les surfaces métalliques comme que les plans [111] du cuivre, dans lesquelles les fonctions d'onde électroniques ont une décroissance exponentielle en dehors du plan. Ces surfaces métalliques sont la réalisation la plus ancienne du SBE [Tam32]. Il convient d'évoquer également les électrons déposés sur la surface de l'hélium liquide, qui présentent la particularité de permettre de réaliser des SBE à des densités extrêmement faibles, de l'ordre de 10^{13} m^{-2} , alors que les densités habituellement rencontrées varient entre 10^{15} m^{-2} (pour AlGaAs) et 10^{18} m^{-2} (surfaces métalliques). Enfin, les états de surface des isolants topologiques tridimensionnels constituent la dernière matérialisation du SBE en date et offrent des perspectives stimulantes en matière d'innovation et de recherche [HQW⁺08].

1.1.1 Hétérostructures semi-conductrices

L'épitaxie par jet moléculaire permet la croissance de structures électroniques dans lesquelles l'épaisseur de chaque couche est contrôlée avec une précision de l'ordre de la couche atomique. Par cette méthode il est possible de créer un empilement, ou hétérostructure, constituée d'une couche d'Arséniure de Gallium (GaAs) d'une dizaine de nanomètre, entourée de deux couches d'Arséniure de Gallium-Aluminium ($\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$). En dopant l'Arséniure de Gallium-Aluminium avec des donneurs (du Silicium en général), on fournit des électrons à la bande de conduction de l'Arséniure de Gallium, qui forme le SBE (voir Fig. 1.1).

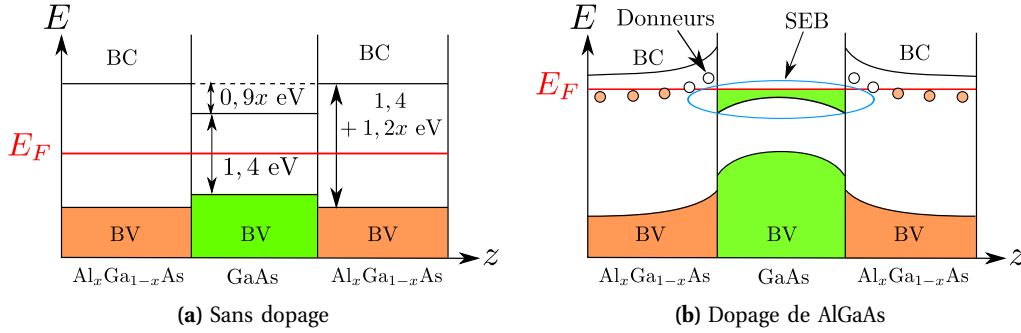


FIGURE 1.1 Une réalisation expérimentale du système bidimensionnel d'électrons (SBE) : le puits quantique à base d'Arséniure de Gallium. Le dopage de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ par des donneurs permet de peupler la bande de conduction de GaAs, qui constitue le SBE. La structure est réalisée par épitaxie par jet moléculaire, ce qui permet de contrôler l'épaisseur de GaAs avec une précision de l'ordre de la couche atomique.

Du fait de l'épaisseur très faible du GaAs ($\sim 10 \text{ nm}$), la promotion des électrons du SBE dans des niveaux excités du potentiel de confinement selon la direction z correspond à une énergie beaucoup plus grande que les excitations dans le plan. Ainsi les électrons de la bande de conduction du GaAs forment un SBE car les degrés de liberté liés à la direction de croissance z sont gelés, comme seulement la plus basse sous-bande formée par ce confinement est peuplée.

Le puits quantique à base d'Arséniure de Gallium présente de nombreux avantages pour l'étude des effets Hall quantiques :

- La densité électronique n du SBE, fixée lors de la croissance, est rendue modulable par l'utilisation d'une tension de grille selon z . Les densités accessibles vont de $0,5 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ à $5 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$.¹
- Le SBE est insensible aux variations du potentiel cristallin sous-jacent. En effet le pas du réseau du GaAs est de l'ordre de $0,6 \text{ nm}$ alors que la longueur d'onde de Fermi vaut environ 10 nm aux densités accessibles. Chaque électron est donc réparti sur un grand nombre de sites du réseau et le potentiel cristallin peut donc être traité comme un fond uniforme, dans le cadre du modèle du *jellium*. Ceci reste vrai en présence d'un champ magnétique, pour des champs magnétiques inférieurs à 2500

1. J'ai adopté les unités SI ici alors que les expérimentateurs donnent généralement les densités en cm^{-2} .

Grandeur	Symbole	Valeur
Largeur	w	(10 - 100) nm
Écart des bandes	V_0	(200 - 500) meV
Densité électronique	n	$(0,5 - 5) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$
Mobilité	μ	$(0 - 10^7) \text{ cm}^{-2}/\text{Vs}$
Permittivité diélectrique	ϵ	$13 \times \epsilon_0$
Facteur de Landé	g	-0,44
Masse effective	m	$0,067 \times m_e$

TABLE 1.1 Grandeurs caractéristiques des puits quantiques à base d'Arséniure de Gallium. La masse nue de l'électron est désignée par m_e , et ϵ_0 représente la permittivité du vide.

Teslas; cette condition est toujours vérifiée en pratique pour les champs magnétiques accessibles expérimentalement, qui sont de l'ordre de 10 T.

- La mobilité électronique est très grande dans ces systèmes, $\mu \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Ceci est dû au fait que les dopants, qui induisent du désordre dans le potentiel ressenti par les électrons et réduisent ainsi la mobilité, sont à l'extérieur de la couche de GaAs qui abrite le SBE. La mobilité est également plus importante dans les puits larges, ce qui justifie leur utilisation expérimentale. Les puits larges seront discutés plus en détail par la suite.

Les grandeurs caractéristiques de ce dispositif sont résumées dans le tableau 1.1.

1.1.2 Système bicouche

En plus de fournir une réalisation expérimentale du SBE, l'épitanie par jet moléculaire permet de juxtaposer un nombre quelconque de SBEs séparés par une distance ajustable à souhait. Ainsi pour créer une bicouche il suffit d'intercaler deux couches de GaAs entre les couches de d'AlGaAs dopées, elles-mêmes séparées par une couche isolante avec un gap plus grand que le GaAs (Fig. 1.2).

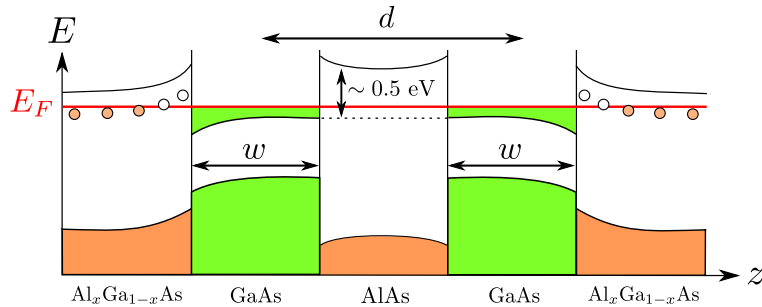


FIGURE 1.2 Dispositif expérimental de la bicouche. Une couche d'Arséniure d'Aluminium (AlAs) pur sépare les couches et, de par son gap important (2,12 eV), assure la suppression de l'effet tunnel entre les couches. Les deux couches ont une épaisseur w de l'ordre de la dizaine de nm et sont séparées par une distance d du même ordre de grandeur, dans la plupart des expériences sur l'effet Hall quantique dans la bicouche.

Pour que ce système présente des effets nouveaux par rapport au système à une composante, il est nécessaire que la distance inter-couches d soit de l'ordre de la longueur de corrélation intra-couches, c'est-

à-dire la distance moyenne entre électrons dans la même couche. Comme nous le verrons plus loin, dans le régime qui nous intéresse celle-ci est donnée par la longueur magnétique $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$, qui vaut environ 10 nm en présence d'un champ magnétique de 10 T. L'expérience historique de J. Eisenstein [EBP⁺92] sur l'effet Hall quantique fractionnaire dans les bicouches montre que les corrélations entre les couches sont perdues pour les distances supérieures à $d \approx 3l_B$.

Afin de modéliser le caractère à deux composantes de la bicouche, il est utile de représenter l'indice de couche comme un pseudospin 1/2 qui s'ajoute au vrai spin des électrons. La description du système que l'on adoptera alors est celle schématisée par la figure 1.3. Le potentiel d'interaction dépend de l'indice de couche σ et de la distance r entre les électrons dans le plan. Si l'on néglige l'épaisseur des couches, le potentiel d'interaction intra-couche est simplement le potentiel de Coulomb

$$V_{\sigma\sigma}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad (1.1)$$

où ϵ est la constante diélectrique du matériau abritant le SBE², tandis que le potentiel inter-couche

$$V_{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \quad (1.2)$$

tient compte de la distance entre les couches d .

Il faut garder à l'esprit que, contrairement au cas du vrai spin, la symétrie SU(2) de rotation dans l'espace de pseudospin est absente car le potentiel d'interaction dépend des couches relatives; S^2 n'est donc pas un bon nombre quantique ici, par contre, si le terme tunnel entre les couches est négligeable S_z reste un bon nombre quantique.

1.1.3 Puits large

Il y a plusieurs différences entre un SBE idéal, infiniment fin, et le système présenté sur la figure 1.1b. La première est clairement la largeur non-nulle du SBE réalisé dans les hétérostructures. Afin de tenir compte de cette largeur, on peut modéliser le potentiel de confinement par un puits de potentiel infini³ de pente linéaire, qui est représenté sur la figure 1.4.

$$V(z) = \begin{cases} Vz/w & \text{si } z \in [-w/2, w/2] \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

L'introduction d'une pente linéaire Vz/w permet de rendre compte de la présence du potentiel de grille sur l'un des côtés du puits – qui sert à contrôler la densité expérimentalement – et plus généralement d'étudier l'effet de l'asymétrie du potentiel de confinement. Les deux paramètres du modèle sont donc la largeur w du puits, et l'énergie de biais V entre les deux extrémités du potentiel de confinement.

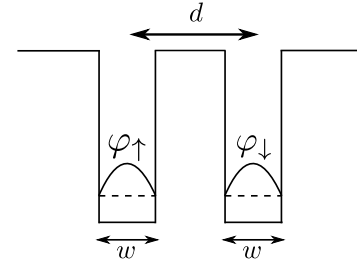


FIGURE 1.3 Bicouche et pseudospin

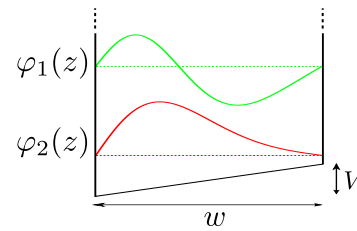


FIGURE 1.4 Potentiel de confinement : puits quantique biaisé

2. Dans tout le manuscrit ϵ désigne le produit de la permittivité diélectrique relative ϵ_r et de la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m.

3. Cette approximation par confinement de profondeur finie est justifiée comme suit. Pour une concentration d'Aluminium typique $x \sim 30\%$, l'écart entre les bandes de conduction du GaAs et celle du AlGaAs vaut $U_0 = 0,9x = 0,27$ eV. Pour la taille typique $w = 50$ nm des puits pertinents pour cette étude, le gap de sous-bande vaut $\Delta = 7$ meV pour un puits carré. La condition $U_0 \gg \Delta$, satisfaite, justifie le choix d'un potentiel infiniment profond.

Les solutions φ de l'équation de Schrödinger correspondante

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2\varphi + V\frac{z}{w}\varphi(z) = E\varphi(z) \quad (1.4)$$

sont des combinaisons linéaires de fonction d'Airy de première (Ai) et seconde (Bi) espèce

$$\varphi(z) = \mathcal{N} \left\{ \text{Ai} \left[k \left(V \frac{z}{w} - E \right) \right] + c \text{Bi} \left[k \left(V \frac{z}{w} - E \right) \right] \right\}, \quad (1.5)$$

où $k^{-1} = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2 V^2}{2mw^2}}$, et \mathcal{N} est une constante de normalisation. Le coefficient c et l'énergie propre E sont obtenus par résolution numérique des équations de conditions aux limites, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(w) = 0$.

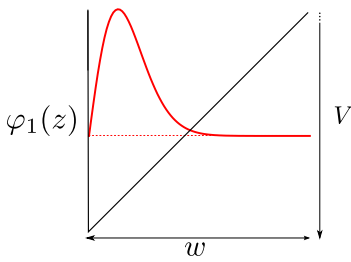


FIGURE 1.5 Limite $V \rightarrow \infty$: puits triangulaire

Aux valeurs de biais importantes les sous-bandes sont celles d'un potentiel de confinement triangulaire (figure 1.5), qui décrit, par exemple, la couche d'inversion d'une hetero-structure GaAs-Al_xGa_{1-x}As [Yos02]. Dans ce cas les énergies sont obtenues avec une grande précision par l'approximation WKB [CTDL73]

$$E_n = \left[\frac{3\pi}{2} \left(n + \frac{3}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{2mw^2} V^2 \right)^{\frac{1}{3}}; \quad (1.6)$$

on voit alors que les états excités sont séparés de la plus basse sous-bande par un gap important, et la fonction d'onde de la plus basse sous-bande est correctement décrite par un ansatz dû à Fang et Howard, $\varphi_{\text{FH}}(z) \propto ze^{-3z/2w}$.

On s'intéressera fréquemment au cas du puits carré – c'est-à-dire sans pente – qui correspond à $V = 0$. Dans ce cas la connaissance des fonctions d'onde ne nécessite pas de calcul numérique, elles sont données par

$$\varphi_\alpha(z) = \sqrt{\frac{2}{w}} \times \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha\pi z}{w}\right) & \text{si } \alpha \text{ est paire} \\ \sin\left(\frac{\alpha\pi z}{w}\right) & \text{si } \alpha \text{ est impaire} \end{cases} \quad (1.7)$$

et ont pour énergie

$$E_\alpha = \frac{\alpha^2 \hbar^2 \pi^2}{2mw^2}. \quad (1.8)$$

L'écart énergétique entre les deux plus basses sous-bandes est nommé *gap de sous-bande*, pour le puits carré il vaut

$$\Delta = E_2 - E_1 \simeq \frac{168}{(w/10 \text{ nm})^2} \text{ meV}, \quad (1.9)$$

et il est du même ordre de grandeur pour les puits quantiques faiblement biaisés qui nous intéressent plus particulièrement.

Si le gap de sous-bande Δ est grand par rapport aux autres échelles d'énergies du problème, le degré de liberté de sous-bande peut être omis. Dans ce cas, l'extension finie des fonctions d'onde électroniques dans la direction z a pour seul effet d'adoucir la partie courte portée de l'interaction coulombienne. Celle-ci s'écrit, dans sa version tridimensionnelle,

$$V(r, z) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (1.10)$$

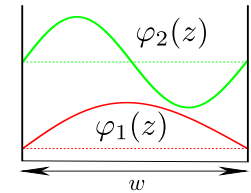


FIGURE 1.6 $V = 0$: puits carré

où r est la distance entre les électrons dans le plan xy , et z leur distance hors du plan. Le potentiel effectif s'obtient par intégration sur la direction z de la fonction d'onde de confinement

$$V_{\text{eff.}}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \int \frac{|\varphi_1(z)|^2 |\varphi_1(z')|^2}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz dz' \quad (1.11)$$

où φ_1 est la fonction d'onde (1.7) pour la plus basse sous-bande $\alpha = 1$, où réside le niveau de Fermi. L'interaction effective est bien sûr d'autant plus faible à courte portée que le puits est large.

Dans ce manuscrit on s'intéresse à l'autre cas de figure, dans lequel le degré de liberté de sous-bande ne doit pas être négligé *a priori*. Cette situation est rencontrée lorsque la largeur du puits est grande devant la longueur magnétique

$$l_B \simeq \frac{25,6 \text{ nm}}{\sqrt{B[\text{T}]}}, \quad (1.12)$$

En présence d'interactions le peuplement des sous-bandes excitées est favorisé par le fait que dans celles-ci la fonction d'onde électronique présente des nœuds qui augmentent la séparation des électrons et réduisent ainsi l'énergie d'interaction. On utilisera néanmoins, à l'approximation où on se limite, les deux premières sous-bandes électroniques, car, alors que la promotion d'un électron dans la première sous-bande excitée coûte une énergie $E_2 - E_1 = \Delta$, une excitation dans le deuxième niveau excité requiert une énergie $E_3 - E_1 \simeq 8\Delta/3$, presque trois fois plus importante (la validité de cette approximation sera discutée plus loin, dans le cadre de l'analyse des fonctions d'essai de l'EHQF).

De même que pour la bicouche, on utilisera la notation spinorielle pour le degré de liberté de sous-bande, $\varphi_1 = \varphi_{\uparrow}$ et $\varphi_2 = \varphi_{\downarrow}$, par commodité ; cependant, plus encore que dans le cas de la bicouche, l'analogie avec le spin est à manipuler avec précaution. En effet l'interaction effective

$$V_{\text{eff.}}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \int \frac{\varphi_{\sigma_1}(z)^* \varphi_{\sigma_2}(z')^* \varphi_{\sigma_3}(z) \varphi_{\sigma_4}(z')}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz dz' \quad (1.13)$$

n'a, dans l'espace de pseudospin, ni la symétrie SU(2) du spin, ni la symétrie U(1) – de rotation autour de l'axe z – qu'a le terme d'interaction de la bicouche. Ainsi ni S^2 ni S_z ne constituent de « bons nombres quantiques » car ils ne commutent pas avec le hamiltonien d'interaction. En l'absence de ces symétries on doit en principe considérer seize coefficients d'interaction qui correspondent aux deux orientations des quatre spins $\sigma_1 \dots \sigma_4$. Ce nombre peut-être réduit à six coefficients indépendants en utilisant l'hermiticité du hamiltonien, l'indiscernabilité des électrons, et la réalité des fonctions d'onde de sous-bande. L'ensemble de coefficients $V_{\text{eff.}}(r)$ d'indices

$$\sigma_1 \dots \sigma_4 = \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow, \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow, \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow \quad (1.14)$$

suffisent alors à spécifier complètement l'interaction, les autres pouvant s'écrire en fonction de ceux-là. Dans le cas d'un potentiel qui possède une symétrie d'inversion le long de l'axe z , les termes $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$ et $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$ s'annulent, car alors l'intégrant est impaire dans l'équation (1.11). Dans ce cas le nombre de coefficients indépendants et non-nuls est réduit à quatre. Le nombre de coefficients d'interaction indépendants dans les différentes situations sont rassemblés dans le tableau 1.2, en comparaison avec d'autres systèmes à deux composantes.

Le tableau se lit de la manière suivante. La première colonne indique le système considéré. Dans la deuxième colonne, nous indiquons l'interaction effective (1.13) pertinente dans la symétrie considérée. Pour une interaction invariante sous SU(2), comme pour le cas du spin physique des électrons, seuls 4 coefficients d'indices $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ et $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ sont non-nuls et identiques à $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$.

Le puits large et la bicouche présentent des caractéristiques communes. Pour une largeur importante les électrons se repoussent dans la direction z , s'agglutinant aux extrémités du potentiel de confinement.

Système	Symétrie	# coeffs. non-nuls	Coeffs. $V_{\text{eff.}}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(r)$ indépendants
Spin	SU(2)	4	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$
Bicouche	U(1)	4	$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$
Puits large symétrique	\times	8	$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow$
Puits large	\times	16	$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow, \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$

TABLE 1.2 Les différents systèmes à deux composantes considérés dans ce manuscrit. De haut en bas, le nombre de coefficients d'interaction indépendants croît. Le spin, qui est négligé dans l'ensemble de ce travail, est mentionné ici à titre d'exemple.

Cette configuration peut-être assimilée à une bicouche effective, les couches effectives étant les zones d'amoncellement des électrons. Autrement dit, les électrons peuvent bénéficier de la première bande excitée pour former deux états de « couche effective »

$$\varphi_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(z) + \varphi_2(z)] \quad \text{et} \quad \varphi_-(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)], \quad (1.15)$$

localisés chacun près du bord de gauche (+) ou de droite (-) de la zone de confinement (voir Fig. 1.7). Moyennant le coût énergétique du gap de sous-bande dû au peuplement partielle de la première sous-bande excitée $\alpha = 2$, les électrons minimisent ainsi leur énergie d'interaction. Notons que des modèles *ad hoc* de bicouche ont régulièrement été utilisés dans la description du puits large. Comme nous le verrons dans la suite, ces modèles peuvent trouver une justification partielle dans le cadre de notre modèle à deux sous-bandes [PMM⁺09].

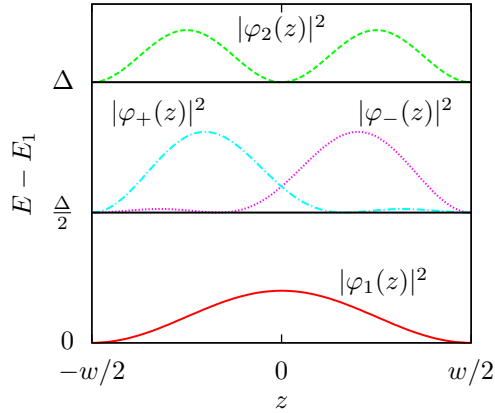


FIGURE 1.7 Densités de probabilité des états de bicouches effectives dans un puits large et énergies de sous-bande correspondantes. Les états de bicouche sont formés à partir des deux premières sous-bandes $\varphi_{\pm}(z) = [\varphi_1(z) \pm \varphi_2(z)] / \sqrt{2}$ et diminuent l'énergie d'interaction.

Les conditions de formation de cette bicouche effective constituent l'un des objets d'étude de ce manuscrit.

1.2 Effet Hall classique et effet Hall quantique entier

1.2.1 Effet Hall classique

L'effet Hall, aujourd'hui dit « classique », fut découvert par E. H. Hall en 1879 [Hal79]. Celui-ci savait, grâce aux travaux de J. K. Maxwell [Max81], qu'un champ magnétique courbe la trajectoire des électrons, et souhaita déterminer les conséquences de la présence d'un champ magnétique sur la propagation du courant dans un métal.

Il plongea une plaque d'or traversée par un courant électrique dans un champ magnétique selon la disposition dépeinte sur la figure 1.8, et observa l'apparition d'une tension dans la direction transverse au champ magnétique et à la propagation du courant. Cette tension transverse V_H , dite tension de Hall, est proportionnelle au courant I . Le coefficient de proportionnalité $R_H = V_H/I$ est appelé résistance de Hall et est donné par

$$R_H = \frac{B}{en}, \quad (1.16)$$

où B est le champ magnétique, e la charge élémentaire et n la densité de porteurs de charge.

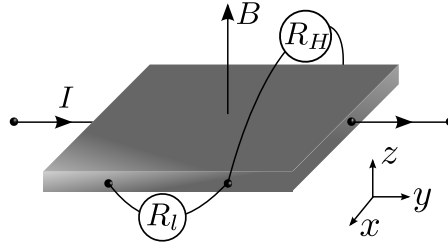


FIGURE 1.8 Expérience de Hall. Une plaque métallique est plongée dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. On injecte un courant I selon la direction x et on mesure la tension V_H selon la direction y . Le rapport des deux donne la résistance de Hall $R_H = V_H/I$. R_l désigne la résistance longitudinale.

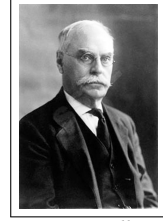
Pour comprendre cette relation de proportionnalité entre le courant et la tension de Hall, déterminons la trajectoire d'un électron en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique orthogonaux. Supposons $E/B < c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide. Cette inégalité est toujours vérifiée dans les conditions expérimentales qui nous intéressent. Plaçons-nous ensuite dans le référentiel qui se meut à la vitesse $\mathbf{v}_d = E/B\mathbf{e}_x$, dite *vitesse de dérive*. Le champ électrique est annulé par ce changement de référentiel

$$E \mapsto E' = \frac{E - v_d B}{\sqrt{1 - (v_d/c)^2}} = 0 \quad (1.17)$$

tandis que le champ magnétique est intensifié

$$B \mapsto B' = \frac{B - v_d E/c^2}{\sqrt{1 - (v_d/c)^2}} = B \sqrt{1 + \left(\frac{v_d}{c}\right)^2}. \quad (1.18)$$

Notons que dans la plupart des situations, notamment dans celles qui nous intéressent ici, on a $v_d/c \ll 1$, de sorte que $E \mapsto E' = 0$ et $B \mapsto B' \simeq B$. Dans ce référentiel, l'électron de charge $-e$ subit seulement l'influence du champ magnétique, et donc la force de Lorentz $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. La résolution des équations



E. H. Hall.

du mouvement, que je ne reproduis pas ici mais qui ne pose pas de difficulté, donne pour la position de l'électron

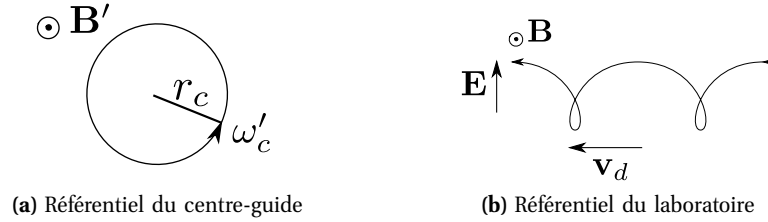
$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} X - r_c \sin(\omega_c t + \phi) \\ Y + r_c \cos(\omega_c t + \phi) \\ z_0 + v_z t, \end{cases} \quad (1.19)$$

où $\omega_c = eB/m$ est la pulsation cyclotron. La position du « centre guide » $\mathbf{R} = (X, Y, z(t))$, qui est le centre du mouvement cyclotron et qui serait une constante du mouvement pour un système invariant par translation, est déterminée par les positions et vitesses initiales, de même que le rayon cyclotron r_c et la phase initiale ϕ . Dans la mesure où le mouvement de translation rectiligne des électrons suivant z n'est influencé ni par le champ électrique, ni par le champ magnétique, la direction z n'intervient pas dans l'explication de l'effet Hall classique. On se contentera alors de la description du mouvement dans le plan (Ox, Oy) , dans lequel

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}(t) = (X + v_y(t)/\omega_c, Y - v_x(t)/\omega_c) \quad (1.20)$$

où l'on a introduit la position cyclotron $\boldsymbol{\eta}$ qui décrit la rotation autour du centre-guide. Cette trajectoire circulaire est appelée orbite cyclotron, et elle est représentée sur la figure 1.9.

FIGURE 1.9 Orbite cyclotron dans deux référentiels.



En utilisant la définition du courant électrique microscopique

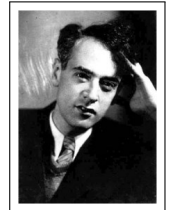
$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = -en\frac{E}{B}\mathbf{e}_x, \quad (1.21)$$

on obtient l'expression de la résistance de Hall mesurée expérimentalement

$$R_H = \rho_H = \frac{|E_y|}{|j_x|} = \frac{B}{en}. \quad (1.22)$$

1.2.2 Quantification de Landau

La reproduction de l'expérience de Hall dans la *limite quantique extrême* a permis la découverte des effets Hall quantiques au début des années quatre-vingt. La limite quantique extrême est atteinte lorsque le champ magnétique est très intense, la température très faible ($k_B T \ll \hbar\omega_c$), et lorsque le confinement des électrons dans une direction z rend le système bidimensionnel. Cette dernière condition interdit l'existence d'un continuum dans le spectre énergétique, qui correspondrait aux excitations dans la direction z , et brouillerait la quantification de l'énergie par le champ magnétique. Dans cette limite seules les plus basses sous-bandes sont peuplées, voire seulement la plus basse sous-bande. Le champ magnétique est qualifié d'intense lorsqu'il permet quantification de l'énergie cinétique. Ceci est rendu possible lorsque le nombre d'électrons N du SBE est comparable au nombre de quanta de flux N_B qui



L. D. Landau.

traversent le système. Ce dernier est donné par le rapport du flux magnétique $\phi = B/S$ et du quantum de flux $\phi_0 = h/e$,

$$N_B = \frac{\phi}{\phi_0}. \quad (1.23)$$

Afin d'obtenir la bonne limite, il faut alors

$$\frac{N}{N_B} \sim \frac{n}{B/\phi_0} \sim 1, \quad (1.24)$$

ce qui correspond à des champs de $B \sim 4,13\text{T} \times n [10^{15} \text{ m}^{-2}]$. Au vu de cette condition on comprend pourquoi E. H. Hall n'observa pas d'effet Hall quantique. Il utilisa un échantillon d'or dont la densité vaut $\rho_{\text{Au}} = 5,9 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, soit une densité planaire de $n_{\text{Au}} = (n_{\text{Au}})^{2/3} \simeq 1,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-2}$. L'observation de l'effet Hall quantique dans un échantillon d'or requiert donc un champ magnétique totalement inaccessible de 6000 T environ. Notons qu'en plus de cette restriction, la température était de toute manière trop élevée dans l'expérience de Hall pour permettre l'observation des effets quantiques.

La nécessité d'une description du système par la mécanique quantique est manifeste au vu de la quantification très précise de la valeur de la résistance de Hall dans les effets Hall quantiques qui seront décrits par la suite.

Pour la dynamique d'un électron en champ magnétique, la différence entre le problème quantique et le problème classique réside dans l'étalement des orbites cyclotrons. La longueur typique de cet étalement est de l'ordre de la *longueur magnétique*

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \simeq \frac{26 \text{ nm}}{\sqrt{B[\text{T}]}} \quad (1.25)$$

où le champ est mesuré en tesla (T).

Nous commençons par déterminer les états invariants par translation dans le temps. Ce problème et sa résolution portent le nom de quantification de Landau. La substitution minimale $\mathbf{p} \mapsto \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ donne l'expression du hamiltonien d'un électron de masse m confiné dans le plan (Ox,Oy), soumis à un champ magnétique $B\mathbf{e}_z$. En négligeant l'énergie Zeeman, il s'écrit

$$H = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}. \quad (1.26)$$

Notons que $\boldsymbol{\pi}$ ne correspond ni à l'impulsion canonique \mathbf{p} ni au générateur des translations en champ magnétique \mathfrak{T} ; $\boldsymbol{\pi}$ est parfois appelée *impulsion généralisée* et est proportionnelle à l'opérateur vitesse $\mathbf{v} = \boldsymbol{\pi}/m$. La détermination des états propres de H passe par une identification au problème de l'oscillateur harmonique unidimensionnel. Cette correspondance est dévoilée par la réécriture du hamiltonien et le calcul du commutateur [Goe09]

$$\begin{aligned} [\pi_x, \pi_y] &= [p_x + eA_x(\mathbf{r}), p_y + eA_y(\mathbf{r})] \\ &= \underbrace{[p_x, p_y]}_{=0} + e \underbrace{[p_x, A_y(\mathbf{r})]}_{=-i\hbar\partial_x A_y} - e \underbrace{[p_y, A_x(\mathbf{r})]}_{=i\hbar\partial_y A_x} + e^2 \underbrace{[A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r})]}_{=0} \\ &= -ie\hbar B \end{aligned} \quad (1.27)$$

obtenu à l'aide de l'identité

$$[A, f(B)] = \partial_B f[A, B] \quad \text{si} \quad [[A, B], A] = [[A, B], B] = 0. \quad (1.28)$$

Électron 2d sous champ mag.	Oscillateur harmonique 1d
$H = \frac{\pi_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2} \eta_x^2$	$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$
$[\eta_x, \pi_x] = i\hbar$	$[x, p] = i\hbar$
$a = \sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}} \left(\eta_x + \frac{i}{m\omega_c} \pi_x \right)$	$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$
ou $a = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} (\eta_x + i\eta_y)$	

TABLE 1.3 Lien entre le hamiltonien d'un électron sous champ magnétique en deux dimensions, et le hamiltonien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel.

En introduisant la position cyclotron $\boldsymbol{\eta}$ [Eq. (1.20)]

$$(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{m} (\pi_x, \pi_y) = \omega_c (\eta_y, -\eta_x) \quad (1.29)$$

cette relation de commutation prend la forme

$$[\eta_x, \pi_x] = - \left[\pi_x, \frac{\pi_y}{m\omega_c} \right] = i\hbar. \quad (1.30)$$

L'analogie avec l'oscillateur harmonique apparaît sitôt que l'on réécrit le hamiltonien en utilisant l'opérateur position cyclotron (Tab. 1.3). On remarque que la relation de commutation (1.30) peut aussi s'écrire

$$[\eta_x, \eta_y] = -i l_B^2 \quad (1.31)$$

De même les coordonnées du centre guide \mathbf{R} , dont la position est définie par analogie au problème classique par $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}$, ont pour commutateur

$$[X, Y] = i l_B^2. \quad (1.32)$$

La valeur non-nulle de ce commutateur implique l'existence d'une relation d'indétermination de Heisenberg sur les positions du centre-guide

$$[X, Y] = i l_B^2 \implies \Delta X \Delta Y \geq \frac{l_B^2}{2}. \quad (1.33)$$

L'indétermination, habituellement astreinte à l'espace de phase, se retrouve dans l'espace réel en présence d'un champ magnétique ; on ne peut connaître les position X et Y du centre-guide simultanément, et il en va de même des coordonnées cyclotrons η_x et η_y .

De l'analogie avec l'oscillateur harmonique unidimensionnel on déduit la simplification suivante pour le hamiltonien cinétique

$$H = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (1.34)$$

où a et a^\dagger sont les opérateurs d'échelle habituels de l'oscillateur harmonique (voir tableau 1.3), qui vérifient $[a, a^\dagger] = 1$. On obtient ainsi l'expression suivante des énergies

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad (1.35)$$

les niveaux d'énergies, régulièrement espacés et proportionnels à B , sont appelés *niveaux de Landau* (NLs).

Les états propres correspondants, quant à eux, ne sont pas invariants de jauge. En effet un changement de jauge produit par la fonction χ change la phase des fonctions d'onde

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi \implies \psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi(\mathbf{r}) e^{\frac{i}{\hbar} e \chi(\mathbf{r})}. \quad (1.36)$$

Un choix de jauge est donc nécessaire ici, on aura recours à trois jauges différentes dans ce travail. Les deux premières, la jauge symétrique et celle de Landau, sont présentées dans les paragraphes suivants. La troisième, la jauge latitudinale, est adaptée à la géométrie sphérique utilisée pour les études numériques et est discutée dans l'annexe A.

Le rôle de la jauge peut également être décrit comme suit. En raison de l'indépendance de l'énergie cinétique classique vis-à-vis de la position du centre-guide, l'énergie cinétique quantique est dégénérée. La distinction des différents états dégénérés nécessite l'introduction d'un second jeu d'opérateurs qui décrivent les degrés de liberté de position du centre-guide, et dont le choix dépend de la jauge.

Jauge symétrique La *jauge symétrique* est définie par $\mathbf{A}_s = (-y, x, 0)B/2$. Dans cette jauge le potentiel vecteur est invariant par rotation autour de l'axe z

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}') &= \mathbf{A}'(\underbrace{\cos \theta x - \sin \theta y}_{=x'}, \underbrace{\sin \theta x + \cos \theta y}_{=y'}) = \frac{B}{2} (-y' \mathbf{e}'_x + x' \mathbf{e}'_y) \\ &= \frac{B}{2} (-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y) = \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Dans la jauge symétrique l'invariance par rotation dans le plan fait du moment cinétique suivant z

$$L_z = x p_y - y p_x \quad (1.38)$$

un choix approprié pour former un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC) avec H . On explicite L_z en utilisant les définitions

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta} \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} - e\mathbf{A} = \frac{\hbar}{2l_B^2} \left(Y + \frac{\eta_x}{2}, X - \frac{\eta_y}{2} \right), \quad (1.39)$$

on a ainsi

$$L_z = \frac{\hbar}{2l_B^2} (\boldsymbol{\eta}^2 - \mathbf{R}^2) = \frac{1}{\omega_c} \left[\underbrace{\left(\frac{\pi_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2} \eta_x^2 \right)}_{=\hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2)} - \underbrace{\left(\frac{p_X^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2} X^2 \right)}_{=\hbar\omega_c(b^\dagger b + 1/2)} \right], \quad (1.40)$$

où l'on a défini l'impulsion du centre-guide par $\mathbf{P} = m\omega_c(Y, -X)$. Le moment cinétique est donc proportionnel à la somme de deux hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques unidimensionnels. Il admet ainsi l'écriture suivante

$$L_z = \hbar (a^\dagger a - b^\dagger b) \quad (1.41)$$

en termes de deux jeux d'opérateurs d'échelle $a^{(\dagger)}$ et $b^{(\dagger)}$ indépendants. Les valeurs propres correspondantes prennent donc la forme $\hbar m$, où $m \in [0, \infty]$. En résumé, les états propres $|n, m\rangle$ du problème vérifient

$$H|n, m\rangle = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) |n, m\rangle \quad (1.42)$$

et

$$L_z|n, m\rangle = \hbar(n - m)|n, m\rangle \quad (1.43)$$

Le terme $n - m$ du moment cinétique contient deux contributions : la première ($-m$) est celle du centre-guide et l'autre (n) est liée au mouvement cyclotron autour du centre-guide et est donnée par l'indice n du NL.

L'expression des fonctions d'onde dans l'espace réel est nécessaire à la poursuite de cette étude. La nature bidimensionnelle du problème rend l'introduction des coordonnées complexes idoine, on y aura donc abondamment recours par la suite. Je choisis la convention $z = x - iy$; le choix du signe négatif, qui paraîtra quelque peu baroque au néophyte de la Physique des effets Hall, est justifié par le sens de rotation des orbites cyclotrons. La trajectoire cyclotron (1.20) dans le référentiel du centre-guide s'écrit

$$z(t) = Z + r_c e^{i\omega_c t}. \quad (1.44)$$

Avec cette définition de z la dérivation dans le plan complexe est liée à son homologue de \mathbb{R}^2 par

$$\partial_z = -\overline{\partial_z} = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y). \quad (1.45)$$

Dans la représentation position complexe l'expression des opérateurs d'échelle est donnée par

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}} \left(\eta_x + \frac{i}{m\omega_c} \pi_x \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_c}} [p_y + eA_y + i(p_x + eA_x)] \\ &= \frac{l_B}{\sqrt{2}} \left[\partial_x - i\partial_y + \frac{x - iy}{2l_B^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2l_B \partial_{\bar{z}} + \frac{z}{2l_B} \right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

De la même manière on trouve

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2l_B \partial_z + \frac{\bar{z}}{2l_B} \right]. \quad (1.47)$$

L'état fondamental $|0,0\rangle$ de moment cinétique nul est solution de $a|0,0\rangle = 0$ et $b|0,0\rangle = 0$. Dans l'espace position complexe la première condition devient

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[2l_B \partial_{\bar{z}} + \frac{z}{2l_B} \right] \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = 0 \iff \partial_{\bar{z}} \psi_{0,0}(z) = -\frac{z}{4l_B^2} \psi_{0,0}(z, \bar{z}). \quad (1.48)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$\psi_{0,0}(z, \bar{z}) = f(z) e^{-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}} \quad (1.49)$$

où $f(z)$ est une fonction analytique, *i.e.* telle que $\partial_{\bar{z}} f = 0$. La forme de $f(z)$ est fixée par la seconde équation qui définit l'état fondamental de moment cinétique nul

$$b|0,0\rangle = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2l_B \partial_z + \frac{\bar{z}}{2l_B} \right] \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = 0. \quad (1.50)$$

De la même manière que précédemment, cette équation impose la forme

$$\psi_{0,0}(z, \bar{z}) = f(\bar{z}) e^{-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}}, \quad (1.51)$$

la différence étant que f doit maintenant être anti-analytique ($\partial_z f = 0$). Comme f doit à la fois être analytique et anti-analytique celle-ci est une fonction constante. On a donc finalement

$$\psi_{0,0}(z, \bar{z}) \propto e^{-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}}. \quad (1.52)$$

Les autres fonctions d'onde sont obtenues par applications successives des opérateurs de promotion dans le NL supérieur a^\dagger et d'augmentation du moment cinétique b^\dagger (les détails du calculs qui permettent de passer à la seconde ligne sont donnés dans la référence [Jai07])

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(z, \bar{z}) &= \langle z, \bar{z} | (a^\dagger)^n (b^\dagger)^{n+m} | 0, 0 \rangle \\ &= \mathcal{N}_{n,m} z^m L_n^m \left(\frac{|z|^2}{2l_B^2} \right) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

où L_n^m désigne les polynômes de Laguerre associés, définis par

$$L_n^m(x) = \frac{x^{-m}}{n!} e^x \partial_x^n (x^{n+m} e^{-x}), \quad (1.54)$$

et

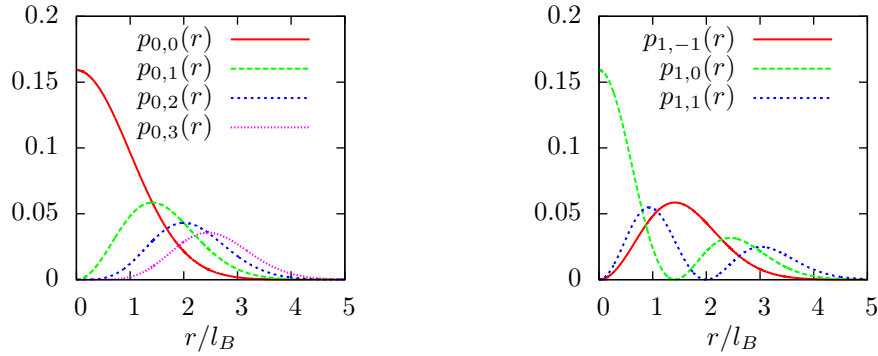
$$\mathcal{N}_{n,m} = \sqrt{\frac{n!}{2\pi 2^m (m+n)! l_B^2}} \quad (1.55)$$

est un facteur de normalisation. La densité de probabilité correspondante vaut

$$p_{n,m}(r) = \mathcal{N}_{n,m}^2 |\psi_{n,m}(z, \bar{z})|^2 = \mathcal{N}_{n,m}^2 r^{2m} \left[L_n^m \left(\frac{r^2}{2l_B^2} \right) \right]^2 e^{-\frac{r^2}{2l_B^2}}. \quad (1.56)$$

Sa dépendance en r est montrée sur la figure 1.10, et les premières orbites de Landau du plan sont tracées sur la figure 1.12.

FIGURE 1.10 Densité de probabilité des orbites de Landau dans la jauge symétrique.



(a) Plus bas niveau de Landau ($n = 0$).

(b) Premier niveau de Landau excité ($n = 1$)

Jauge de Landau Le cas d'un système rectangulaire est plus aisément traité dans la *jauge de Landau*, définie par le potentiel vecteur $\mathbf{A}_L = xB\mathbf{e}_y$. Dans cette jauge le hamiltonien commute avec p_y , dont les valeurs propres seront notées $\hbar k_y$. L'état fondamental de nombre d'onde k_y vérifie $a|0, k_y\rangle = 0$. On obtient l'expression de cette condition dans la représentation position en utilisant la définition de l'opérateur annihilation $a = il_B(p_x + i(p_y - eBx))/(\hbar\sqrt{2})$ issue du tableau 1.3

$$\left(i\partial_y + \frac{x}{l_B^2} + \partial_y\right)\phi_{0,k_y}(\mathbf{r}) = \left(-k_y + \frac{x}{l_B^2} + \partial_x\right)\phi_{0,k_y}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.57)$$

En posant $\tilde{x} = x/l_B + k_y l_B$; les solutions s'écrivent

$$\phi_{n=0,k_y}\left(\tilde{x} = \frac{x}{l_B} - k_y l_B, y\right) = e^{ik_y y} e^{-\frac{1}{2}\tilde{x}^2}; \quad (1.58)$$

ce sont des ondes planes dans la direction y , et des gaussiennes centrées en $X = k_y l_B^2$ dans la direction x . Les fonctions d'onde des NLs supérieurs sont obtenues par application de l'opérateur création a^\dagger

$$\phi_{n,k_y}\left(\tilde{x} = \frac{x}{l_B} - k_y l_B, y\right) = \langle \mathbf{r} | (a^\dagger)^n | n=0, k_y \rangle = \mathcal{N}_n e^{ik_y y} (\partial_{\tilde{x}} - \tilde{x}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{x}^2}, \quad (1.59)$$

où le facteur de normalisation vaut

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{1}{2^n \sqrt{\pi} n! l_B^2}}. \quad (1.60)$$

On introduit les polynômes d'Hermite définis par $H_n(x) = (\partial_x - x)H_{n-1}(x)$ et $H_0(x) = 1$ et on obtient alors l'expression générale des fonctions d'onde dans la jauge de Landau

$$\phi_{n,k_y}\left(\tilde{x} = \frac{x}{l_B} - k_y l_B, y\right) = \mathcal{N}_n e^{ik_y y} e^{-\frac{1}{2}\tilde{x}^2} H_n(\tilde{x}). \quad (1.61)$$

La densité de probabilité associée est indépendante de y

$$p_{n,k_y}\left(\tilde{x} = \frac{x}{l_B} - k_y l_B\right) = \mathcal{N}_n^2 e^{-\tilde{x}^2} [H_n(\tilde{x})]^2. \quad (1.62)$$

Le spectre énergétique et les densités de probabilité dans la jauge de Landau sont schématisés sur la figure 1.11.

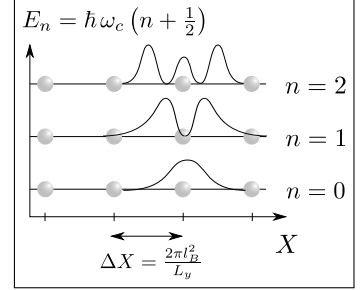


FIGURE 1.11 Premiers niveaux de Landau et densité de probabilité correspondantes dans la jauge de Landau.

Dégénérescence des niveaux de Landau La dégénérescence des NLs dépendant de la taille du système et du champ magnétique, déterminons-la dans la limite d'un système de grande taille par rapport à la longueur magnétique l_B . Dans la jauge symétrique, une orbite de Landau de moment cinétique m est localisée autour d'un cercle de rayon

$$R = \langle R \rangle = l_B \sqrt{2m+1}, \quad (1.63)$$

auquel correspond une surface $S_m = \pi R^2$. Dans un système de surface S sont présentes toutes les orbites telles que $S_m < S$. Le moment cinétique m_{\max} de la plus grande orbite possible, qui est égal au degré de dégénérescence des NLs $N_B + 1$, vérifie donc $S_{m_{\max}} = \pi l_B^2 (2m_{\max} + 1) \simeq 2\pi l_B^2 m_{\max} = S$. On a donc $N_B \simeq m_{\max} \simeq S/(2\pi l_B^2)$. Finalement

$$N_B = \frac{BS}{(e/h)} = \frac{\text{Flux magnétique traversant le système}}{\text{Flux élémentaire}}. \quad (1.64)$$

La dégénérescence d'un NL est donc égale au flux magnétique total BS qui traverse le système, divisé par le flux élémentaire e/h ; c'est donc le nombre de quanta de flux qui traversent le système. Notons qu'un raisonnement similaire pour une géométrie rectangulaire dans la jauge de Landau donne un résultat identique.

1.2.3 Effet Hall quantique entier

En 1980, von Klitzing reproduisit l'expérience historique de Hall en utilisant les moyens technologiques nouveaux à sa disposition, et notamment le transistor à effet de champ (MOS-FET) qui lui permit de remplacer la barre métallique par un SBE d'une épaisseur de $50 \mu\text{m}$ [KDP80]. Un champ magnétique très intense ($\sim 15 \text{ T}$) ainsi qu'une très basse température ($1,5 \text{ K}$) lui permirent de découvrir l'effet Hall quantique entier (EHQE). La différence avec l'effet Hall classique réside dans l'existence de valeurs privilégiées pour la résistance de Hall, qui apparaissent sur tout un intervalle de valeurs du champ magnétique, la résistance de Hall forme des plateaux (voir figure 1.13). Ces plateaux sont centrés autour de valeurs du champ magnétique qui correspondent des facteurs de remplissage ν entiers des niveaux de Landaus (NLs), défini comme le rapport du nombre d'électron N à la dégénérescence des NLs. On a vu précédemment [équation (1.64)] que celle-ci est égale au nombre de quanta de flux N_B . On a donc $\nu = N/N_B$ ou encore

$$\nu = \frac{n}{n_B} = 2\pi l_B^2 n \quad (1.65)$$

où $n_B = N_B/A$ est la densité de flux, et A l'aire du système.

Les valeurs de la résistance de Hall de ces plateaux sont des inverses de multiples entiers de ce qui est maintenant connu sous le nom de constante de von Klitzing R_{K-90} , et qui vaut

$$R_{K-90} = \frac{h}{e^2} = 25,812806 \text{ k}\Omega. \quad (1.66)$$

Sa valeur a été retrouvée avec une précision relative de l'ordre de 10^{-9} dans de nombreuses expériences sur l'EHQE, menées sur des échantillons et dans des géométries différentes. Cette universalité de la valeur de la constante de von Klitzing lui vaut un rôle d'étalon prédominant en métrologie.

Cet accrochage de la résistance de Hall à des valeurs quantifiées est accompagné de l'annulation de la résistance longitudinale. L'expérience et l'observation associée sont schématisés sur la figure 1.13.

Ce fut une grande surprise pour la communauté scientifique. En effet, à première vue le traitement par la mécanique quantique n'altère pas le raisonnement qui explique l'effet Hall classique; dans les deux cas le courant est nul dans le référentiel du centre-guide et la tension de Hall est la même. Pour comprendre les effets Hall quantiques, il est nécessaire de prendre en compte le désordre dû aux impuretés dans l'échantillon. Ce désordre crée un potentiel électrostatique erratique pour les électrons, qui doit être inclus dans la modélisation du système. Dans le cas classique l'effet de ces impuretés est généralement décrit par le modèle de Drude, dans lequel les impuretés sont caractérisées par un terme de frottement mais qui ne suppose pas l'existence d'états stationnaires localisés autour des impuretés. En effet dans les conditions d'observation de l'effet Hall classique le champ magnétique n'est pas assez intense pour localiser les orbites cyclotrons autour des impuretés, et la température élevée permet de toute manière aux électrons de quitter les états liés aux impuretés. Dans le cas quantique ces états liés, ou « localisés », ont un rôle essentiel.

La compréhension de l'EHQE se fait en deux temps. D'abord il faut montrer que l'expression de la résistance de Hall est la même en mécanique quantique qu'en mécanique classique. On la réécrit en introduisant ν , le facteur de remplissage des NLs

$$R_H = \frac{B}{ne} = \frac{h}{\nu e^2}. \quad (1.67)$$



K. von Klitzing.

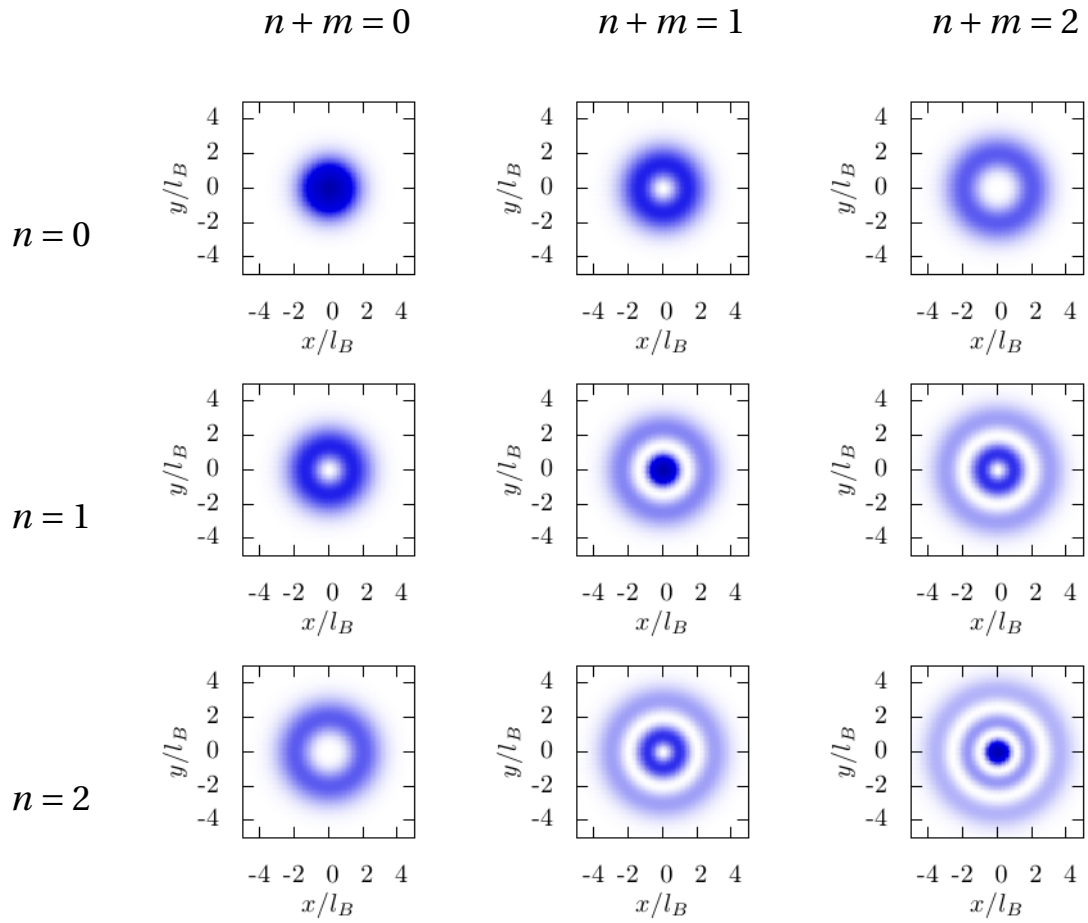


FIGURE 1.12 Densité de probabilité des orbites de Landau dans la jauge symétrique pour les niveaux de Landau $n=0$ (plus bas niveau de Landau), $n=1$ et $n=2$, et les premiers moments cinétiques.

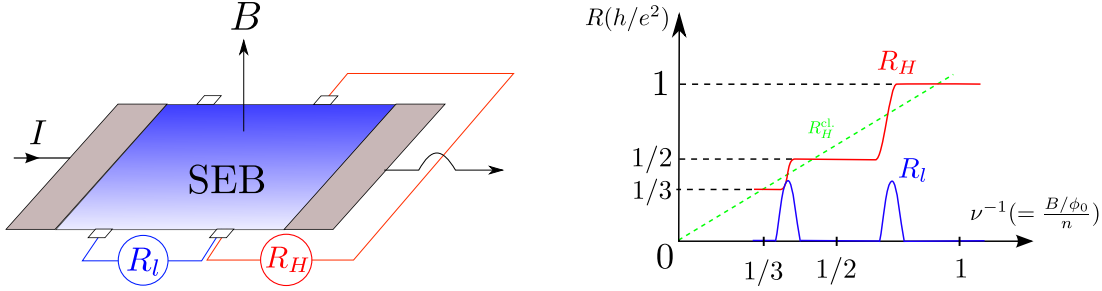


FIGURE 1.13 Expérience de von Klitzing qui permet l'observation de l'EHQE. La résistance de Hall (schéma à droite) présente une succession de plateaux qui coïncident avec l'annulation de la résistance longitudinale. La ligne verte pointillée représente la valeur de la résistance de Hall prédite par la théorie classique.

Ensuite il est nécessaire d'introduire le désordre inhérent à l'échantillon pour rendre compte de l'existence des plateaux dans la résistance de Hall.

Il existe plusieurs moyens de démontrer la formule (1.67). Dans l'ordre d'apparition dans la littérature scientifique, les plus plébiscités sont

1. l'argument proposé par Laughlin [Lau81] en 1981, enrichi par Halperin l'année suivante [Hal82], basé sur l'insertion d'un quantum de flux.
2. le calcul de l'invariant Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs (TKNN) [TKNdN82, Koh85], ou premier nombre de Chern, qui est directement relié à la conductivité de Hall.
3. la théorie de Büttiker dans laquelle on procède à un calcul direct du courant [B88].
4. l'explication de MacDonald basée sur l'incompressibilité du liquide électronique, qui ne fait intervenir que des relations thermodynamiques [Mac94].

Toutes ces théories donnent des descriptions complémentaires de l'EHQE.

Je présente la théorie de Büttiker et l'argument de Laughlin, car la première m'apparaît plus complète, tandis que la seconde sera plus facilement extensible au cas de l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF).

Théorie de Büttiker

Commençons par considérer un échantillon rectangulaire invariant par translation suivant y . L'effet du désordre, du confinement, ainsi qu'une éventuelle tension électrique produisent un potentiel électrique $V(x)$. Dans la jauge de Landau présentée dans la section 1.2.2, le hamiltonien à un corps en présence de désordre est donné par

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y + eBx)^2}{2m} - eV(x). \quad (1.68)$$

Celui-ci ne dépend pas de y , ainsi l'opérateur vitesse suivant y s'écrit

$$\hat{v}_y = \frac{[y, H]}{i\hbar} = \frac{p_y + eBx}{m} = \partial_{p_y} H. \quad (1.69)$$

La valeur moyenne de la vitesse d'un SBE qui remplit exactement un NL est donnée par $v_y = \sum_{k_y} \langle \hat{v}_y \rangle$, les valeurs extrémales de k_y étant imposées par la largeur de l'échantillon suivant la direction x , $0 < X = k_y l_B^2 <$

L_x (voir figure 1.14). On a donc

$$\begin{aligned} v_y &= \int_0^{L_x/l_B^2} \underbrace{\langle n, k_y | \partial_{p_y} H | n, k_y \rangle}_{= \frac{1}{\hbar} \partial_{k_y} E_{n, k_y}} \frac{dk_y}{2\pi/L_y} \\ &= \frac{L_y}{\hbar} [E(X = L_x) - E(0)]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

On voit grâce à cette expression que toutes les contributions à la vitesse suivant y se compensent, hormis, éventuellement, celles des états propres les plus éloignés du centre de l'échantillon. Ces états propres sont centrés en $X = 0$ et $X = L_x$ et on les appelle *états de bord*.

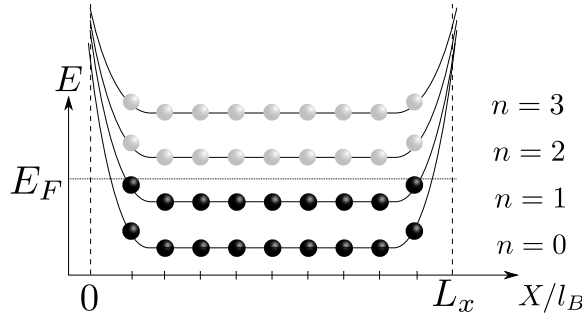


FIGURE 1.14 Niveaux de Landau d'un échantillon rectangulaire de dimensions L_x et L_y en présence d'un potentiel de confinement, sans désordre.

Le courant selon y est donné par

$$I_y = -e \frac{v_y}{L_y} = -\frac{e}{\hbar} [E(X = L_x) - E(0)]. \quad (1.71)$$

En remarquant que le terme entre crochets est la différence de potentiel chimique $\Delta\mu = -eV_H$ entre $x = 0$ et $x = L_x$, on obtient l'expression de la contribution au courant d'un NL rempli

$$I_y = \frac{e^2}{h} V_H = G V_H. \quad (1.72)$$

La contribution des différents NLs remplis au courant est additive pour la conductance $G = R_H^{-1}$, la résistance de Hall d'un système de ν NLs remplis a donc l'expression attendue

$$R_H = \frac{e^2}{\nu h}. \quad (1.73)$$

La prise en compte du désordre dans la direction y n'altère pas ce raisonnement. L'énergie cinétique dans un NL étant supprimée, les états propres suivent les lignes équipotentielles (voir figure 1.15). Ainsi les états de bord contournent simplement les aspérités du potentiel dues aux impuretés, ces états permettent aux électrons injectés dans l'échantillon de le traverser, par les bords, avec une vitesse

$$v_y = \partial_{p_y} E_{n, k_y} = \partial_x V(x)|_{x=L_x}; \quad (1.74)$$

la deuxième égalité est obtenue par un développement de l'énergie au premier ordre en $V(x)$, et suppose donc un potentiel de confinement lentement variable par rapport à la largeur l_B des états électroniques.

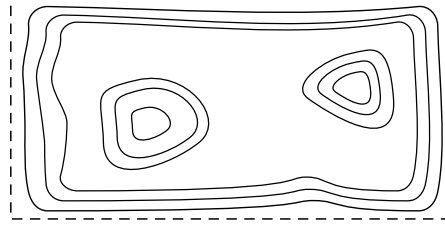


FIGURE 1.15 Lignes équipotentiellles en présence de désordre. Les impuretés et défauts créent des îlots de potentiel et les bords des falaises. On distingue les équipotentiellles délocalisées aux bords de l'échantillon de leur pendant localisé autour d'une impureté dans le volume de l'échantillon. Les bords de l'échantillon sont représentés par des pointillés.

Cette supposition est validée dans les échantillons réels [GV05]. L'annulation de la résistivité est assurée par l'existence de ces états de bords. Ils assurent l'absence de rétrodiffusion pour les électrons injectés dans l'échantillon.

La seule exception à la transmission parfaite des électrons par les canaux de bord apparaît lorsque les deux bords sont connectés par une ligne équipotentielle, auquel cas un électron injecté à un bord pourra être rétrodiffusé sur l'autre bord. Je supposerai que ce cas de figure ne se présente pas par la suite, en raison de la séparation macroscopique des deux bords qui rend la probabilité d'une connexion des deux bords par le désordre très faible.

Une image claire de l'EHQE se dégage de la théorie de Büttiker. L'équation (1.71) montre que seuls les états de bord contribuent au courant. Leur différence d'énergie étant proportionnelle à la tension de Hall, l'expression de la résistance de Hall s'en déduit immédiatement. De plus, l'absence de rétrodiffusion lorsque les deux bords ne sont pas connectés par une ligne équipotentielle à l'énergie de Fermi explique l'annulation de la résistance longitudinale.

Argument de Laughlin/Halperin

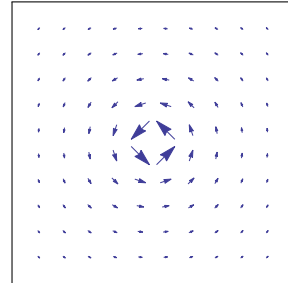
En sus de l'explication précédente de l'EHQE, je choisis de synthétiser ici l'argument de Laughlin qui fut complété par Halperin. Les raisons de ce choix ont à voir avec la facilité avec laquelle l'argument est extensible à l'EHQE, dont la présentation sera donnée par la suite.

Intéressons-nous à l'impact d'une faible variation du champ magnétique autour d'un remplissage entier des niveaux de Landau. L'ajout d'un quantum de flux ϕ_0 localisé à l'origine peut être décrit par l'ajout d'un potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_{\phi_0} = \frac{\phi_0}{2\pi} \nabla \theta = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.75)$$

En effet, le champ magnétique correspondant est orienté selon \mathbf{e}_z , et sa norme vaut⁴

$$B_{\phi_0} = \|\nabla \wedge \mathbf{A}_{\phi_0}\| = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{r} \partial_r (r A_{\phi_0}) = \phi_0 \delta(\mathbf{r}). \quad (1.76)$$



Potentiel vecteur décrivant un quantum de flux localisé à l'origine.

Laughlin montra en 1981 [Lau81] que l'introduction progressive d'un quantum de flux à l'origine transforme chaque orbite de Landau en l'orbite de

4. Ce résultat peut être établi comme suit : On détermine le flux magnétique à travers un disque \mathcal{D} de rayon quelconque $\oint_{\mathcal{D}} \mathbf{dB} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \phi_0 / (2\pi) \oint \mathbf{e}_\theta / r (dr \mathbf{e}_\theta + r d\theta \mathbf{e}_\theta) = \phi_0$. Comme le rayon du disque est arbitraire, le flux ϕ_0 est intégralement localisé à l'origine.

moment cinétique immédiatement supérieure. Pour comprendre ce résultat, il suffit de remarquer que l'introduction du flux ϕ ($0 \leq \phi \leq \phi_0$) correspond à une transformation de jauge décrite par une fonction χ qui vérifie $\nabla\chi = \mathbf{A}_\phi = \phi \mathbf{e}_\theta / (2\pi r)$. Une solution est donnée par $\chi(\mathbf{r}) = \phi\theta/2\pi$.

On suppose que le processus d'insertion de flux est adiabatique, c'est-à-dire qu'il ne produit pas de croisements énergétiques dans le spectre. Cette supposition n'est ni anodine, ni trivialement justifiée. Elle est garantie par l'*incompressibilité* du fluide électronique, autrement dit, d'un gap dans le système. La compressibilité κ est définie comme la variation relative de l'aire A lors d'un changement de pression P infinitésimal

$$\kappa = -\frac{\partial_P A}{A}. \quad (1.77)$$

La pression est donnée par la variation d'énergie par rapport à l'aire

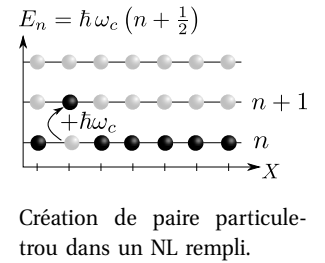
$$P = -\partial_A E. \quad (1.78)$$

En introduisant le potentiel chimique $\mu = \partial_N E$ et la densité $n = N/A$, on a finalement

$$\kappa^{-1} = n^2 \partial_n \mu. \quad (1.79)$$

L'incompressibilité du système ($\kappa^{-1} \rightarrow \infty$) correspond donc à la discontinuité du potentiel chimique en fonction de la densité. Cette discontinuité traduit le fait que l'ajout et le retrait d'une particule dans un NL complètement rempli correspondent à des énergies différentes, et donc que la création d'une paire particule-trou est une excitation gappée.

Aux facteurs de remplissages entiers le système est incompressible, car la création d'une paire particule-trou coûte une énergie $\hbar\omega_c$.



L'incompressibilité n'est pas nécessairement détruite par la présence d'excitations non-gappées, à condition que celles-ci soient localisées soit sur les bords, soit autour d'une impureté. On peut donc vérifier l'incompressibilité en étudiant le spectre du hamiltonien du système débarrassé du désordre et des bords. La présence d'un gap (dans la limite thermodynamique) dans celui-ci implique l'incompressibilité. Étant donné que les bords et le désordre sont absents de cette étude, les deux notions, gap et incompressibilité, sont équivalentes dans toute la suite.

Sous la condition d'adiabaticité de l'insertion du quantum de flux les fonctions d'onde du plus bas NL sont modifiées comme suit

$$\psi_{n,m} = z^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \longrightarrow \psi'_{n,m} = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{r})} \psi_{n,m} = e^{i\frac{\phi}{\phi_0}\theta} \psi_{n,m} \propto \frac{z^{m+\frac{\phi}{\phi_0}}}{|z|^{\phi/\phi_0}} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (1.80)$$

En coordonnées polaires, le moment cinétique s'écrit $L_z = -i\hbar\partial_\theta$. Lors de l'ajout d'un quantum de flux $\phi = \phi_0$, l'état transformé $\psi'_{n,m}$ a donc pour moment cinétique $m+1$. L'ajout du quantum de flux à l'origine transforme donc chaque orbite en l'orbite de moment cinétique immédiatement supérieure.

Il est intéressant de remarquer que l'introduction du quantum de flux est, dans la limite thermodynamique, équivalente à l'insertion de ν trous à l'origine, un par NL rempli. En effet ce processus augmente le moment cinétique de chaque électron pour le placer dans l'orbite de Landau immédiatement supérieure, l'orbite à l'origine est donc dépeuplée de ν électrons. Ce fait *a priori* anecdotique a des implications importantes dans le cas de l'EHQE, notamment l'existence d'excitations de charge fractionnaire.

Suivons la démarche proposée par Halperin [Hal82] en 1982 et étudions le cas d'un échantillon dans la géométrie dite de Corbino, schématisée sur la figure 1.16. Dans cette géométrie le courant selon \mathbf{e}_θ est donné par

$$I = \int_{R_{\text{int.}}}^{R_{\text{ext.}}} \langle j_\theta \rangle dr = -e \int_{R_{\text{int.}}}^{R_{\text{ext.}}} n(r) \langle v_\theta \rangle dr. \quad (1.81)$$

En utilisant l'égalité

$$\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{r}, H]}{i\hbar} = \frac{1}{e} \partial_{\mathbf{A}} H = \frac{2\pi r}{\pi e} \partial_\phi H \mathbf{e}_\theta \quad (1.82)$$

on trouve

$$I = -\langle \partial_\phi H \rangle \underbrace{\int_{R_{\text{int.}}}^{R_{\text{ext.}}} n(r) 2\pi r dr}_{=1} = -\partial_\phi E \quad (1.83)$$

où la dernière égalité découle du théorème de Hellman-Feynman, qui stipule que la valeur moyenne d'une dérivée du hamiltonien est égale à la dérivée de l'énergie.

À la limite thermodynamique l'ajout d'un quantum de flux correspond à une variation infinitésimale du flux magnétique total, on peut alors écrire

$$I = -\partial_\phi E \simeq -\frac{\Delta E}{\phi_0} \quad (1.84)$$

où ΔE est la variation d'énergie associée à l'ajout d'un quantum de flux.

La différence d'énergie potentielle entre les deux bords vaut eV_H . Comme l'insertion d'un quantum de flux correspond à une translation de chaque électron dans l'orbite suivante, la variation d'énergie associée à cette insertion vaut $\Delta E = -eV_H$, c'est-à-dire l'injection d'un électron dans le bord intérieur, et l'extraction d'un autre au niveau du bord extérieur (voir figure 1.17). Si ν NLs sont remplis, la variation d'énergie correspondante vaut $\Delta E = -\nu eV_H$, et on a alors

$$I = \nu \frac{e^2}{h} V_H \implies R_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}, \quad (1.85)$$

comme attendu.

Comme dans la théorie de Büttiker, l'EHQE est expliqué en complétant l'argument par l'introduction du désordre. Le potentiel extérieur ressenti par les électrons est la somme du potentiel de confinement au bord de l'échantillon et du potentiel de désordre dû aux impuretés et dislocations du matériau qui sous-tend le SBE. Le désordre donne une contribution aléatoire au potentiel extérieur, et son effet sur les états propres est difficile à déterminer de manière générale. Néanmoins, comme il a été dit précédemment, en champ magnétique la suppression de l'énergie cinétique contraint les fonctions d'onde à suivre les lignes équipotentielles (voir figure 1.15). Les électrons sont alors soit localisés sur un îlot de potentiel, à l'intérieur de l'échantillon, soit étalés sur une ligne équipotentielle au bord. Les états de bord sont responsables de l'annulation de la résistance longitudinale tandis que les états localisés sont spectateurs des phénomènes de transport électrique.

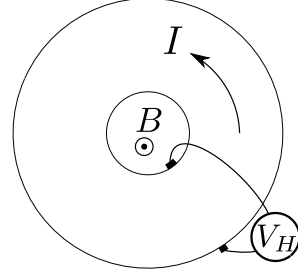


FIGURE 1.16 Géométrie de Corbino.

1.3 Effet Hall quantique fractionnaire

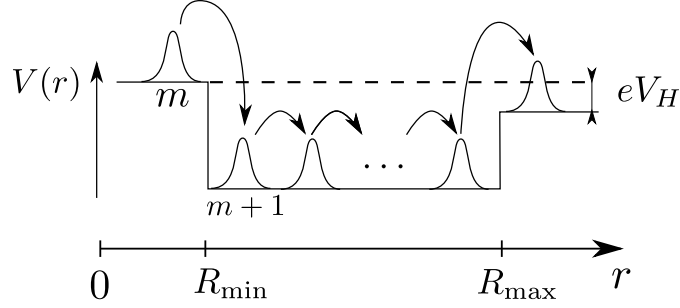


FIGURE 1.17 Translation des orbites de Landau due à l'insertion d'un quantum de flux à l'origine. La variation d'énergie correspondante est la somme du gain en énergie pour l'électron dans l'orbite m , qui est inséré dans l'échantillon en R_{\min} , plus la perte énergétique liée à l'extraction d'un autre électron à l'autre bord, en R_{\max} . Cette variation d'énergie vaut $-eV_H$.

En 1982, soit seulement deux ans après la découverte de l'EHQE, D.C. Tsui, H.L. Stormer et A.C. Gossard rapportèrent l'observation d'un plateau dans la résistance de Hall à une valeur $R_H = 3h/e^2$, qui coïncide avec une réduction drastique de la résistance longitudinale. Cette valeur de la résistance de Hall correspond à une fraction du facteur de remplissage $\nu = 1/3$, l'effet fût donc nommé effet Hall quantique fractionnaire *a posteriori*. Depuis, l'EHQF a été observé à de très nombreuses fractions du facteur de remplissage [STG99].



R. B. Laughlin.

Les théories présentées dans la section 1.2.3, qui traitent d'une assemblée d'électrons indépendants, ne permettent pas d'expliquer l'EHQF car, contrairement au cas de l'EHQE, la compréhension de l'EHQF nécessite la prise en compte des interactions. Dans un NL rempli, les électrons – qui sont des fermions et ainsi soumis au principe de Pauli – ne peuvent pas être diffusés dans un état du même NL par les interactions, car tous les états d'arrivée sont occupés (voir Fig. 1.18a). L'excitation de plus basse énergie est alors la promotion d'un électron dans le NL supérieur. À l'inverse, dans un NL partiellement rempli, les processus de diffusion par les interactions sont possibles à l'intérieur d'un NL, et ils constituent les excitations de plus basse énergie du système (Fig. 1.18b). Comme cette excitation fait intervenir des états de même énergie cinétique, l'énergie cinétique globale reste inchangée et peut être omise (comme constante) dans la description des électrons de basse énergie responsables de l'EHQF.

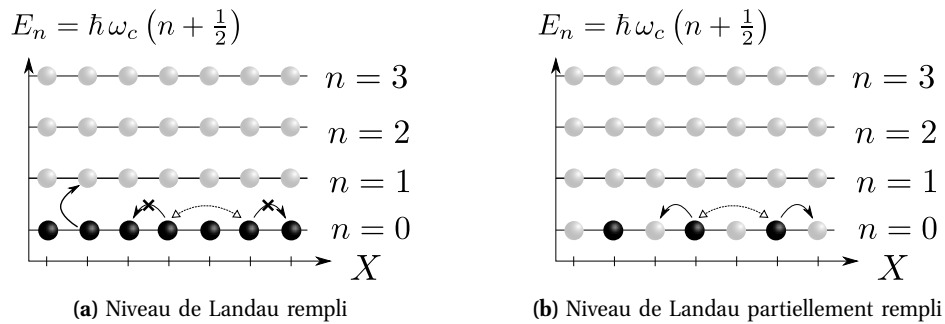


FIGURE 1.18 Niveau de Landau (NL) entièrement et partiellement rempli, dans le premier cas les processus de diffusion par les interactions sont impossibles. L'excitation de plus basse énergie est alors la promotion d'un électron dans un NL supérieur. Dans le cas du NL partiellement rempli les interactions constituent la plus basse échelle d'énergie.

Notons que la projection à un seul NL fait disparaître l'énergie cinétique, et rend ainsi le problème indépendant de la structure de bandes électronique initiale. La nature du matériau sous-jacent au SBE

n'intervient que pour déterminer la valeur de la constante diélectrique et pour déterminer le nombre de degrés de libertés internes, par exemple dans le graphène le degré de liberté additionnel de vallée doit être pris en compte. L'énergie cinétique réapparaît pourtant de manière indirecte lorsque l'on prend en compte par exemple le mélange de NL [PN13, SR13, SM13] ou l'écrantage de l'interaction par les NLs adjacents, dans un traitement perturbatif.

La formule (1.67) pour la résistance de Hall reste vraie en présence d'interactions, car celles-ci n'affectent pas le mouvement du centre de masse des électrons, qui dérive à une vitesse $\mathbf{v}_d = E/B\mathbf{e}_y$. De même que dans le cas de l'EHQE, il nous reste cependant à expliquer l'existence des plateaux dans la résistance de Hall et l'annulation de la résistance longitudinale simultanée. Pour ce faire on reproduit l'argument de Laughlin qui fait appel à l'insertion infinitésimale d'un quantum de flux, présenté dans la section 1.2.3. Celui-ci est reproductible à l'identique dans le cas d'un remplissage partiel des NLs, à condition que l'insertion du quantum de flux soit adiabatique. Cette hypothèse est vérifiée si le système est incompressible, c'est-à-dire si la création d'une paire particule-trou indépendants coûte une énergie non-nulle appelée *gap de charge*.

La tâche qui nous incombe maintenant consiste à déterminer l'état fondamental et les excitations du système d'électrons dans un NL donné, en présence d'interactions. À remplissage partiel, la dégénérescence massive de l'état fondamental interdit tout traitement perturbatif de l'interaction, et l'état fondamental est approché par un ansatz proposé par R. B. Laughlin.

À partir de maintenant et dans toute la suite on utilisera les unités magnétiques, dans lesquels l'unité de longueur est la longueur magnétique [Cf. Eq. (1.25)] et l'unité d'énergie l'interaction de Coulomb typique,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon l_B} = \frac{56}{\epsilon\sqrt{B}} \text{ meV}, \quad (1.86)$$

en termes de la constante diélectrique ϵ (pour GaAs $\epsilon \simeq 13\epsilon_0$).

1.3.1 Le problème à deux corps

Par souci pédagogique, j'exposerai le cas où les deux particules sont dans le plus bas NL et je supposerai l'écart énergétique $\hbar\omega_c$ entre NLs très supérieur à l'énergie d'interaction coulombienne typique $E_c = e^2/(4\pi\epsilon l_B)$, ce qui atténue le mélange des différents NLs. Les orbites de Landau (1.53) avec $n = 0$

$$\psi_{n,m}(z, \bar{z}) = \mathcal{N}_{0,m} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}, \quad (1.87)$$

constituent une base de l'espace de Hilbert associé au plus bas NL. On se place dans le référentiel du centre de masse, dont les coordonnées Z et z sont définies par $z_{1/2} = Z \pm z/2$. Le changement de coordonnées correspondant

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}Z \\ z/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

réalise une tranformation unitaire. On en déduit immédiatement les fonctions d'onde dans le référentiel du centre de masse en utilisant l'équation (1.53). Notamment, dans le plus bas NL les orbites de Landau s'écrivent

$$\psi_{0,m,M}(z, Z) = \mathcal{N}_{m,M} z^m e^{-\frac{|z/\sqrt{2}|^2}{4l_B^2}} Z^M e^{-\frac{|\sqrt{2}Z|^2}{4l_B^2}}, \quad (1.89)$$

m et M étant respectivement les moments cinétiques relatifs et de centre de masse. Les valeurs de m sont restreintes aux entiers impairs afin d'assurer l'antisymétrie de la fonction d'onde. Le facteur de normalisation vaut

$$\mathcal{N}_{m,M} = \sqrt{\frac{1}{2\pi 2^m m! (\sqrt{2}l_B)^2}} \times \sqrt{\frac{1}{2\pi 2^M M! (l_B/\sqrt{2})^2}}. \quad (1.90)$$

L'interaction coulombienne ne dépend que de la distance relative entre les deux particules, elle est donc indépendante de la position du centre de masse, et ne change pas le moment cinétique relatif de la paire, ainsi

$$\langle 0, m, M | V | 0, m', M' \rangle = \delta_{M, M'} \delta_{m, m'} \langle m | V | m \rangle, \quad (1.91)$$

car l'interaction est isotrope. Cette équation amène l'expression suivante du potentiel d'interaction

$$\begin{aligned} V &= \sum_{m, M} \sum_{m', M'} |m, M\rangle \underbrace{\langle 0, m, M | V | 0, m', M' \rangle}_{= \delta_{M, M'} \delta_{m, m'} \langle m | V | m \rangle} \langle m', M' | \\ &= \sum_{m, M} V_m^{(0)} \mathcal{P}_{m, M}, \end{aligned} \quad (1.92)$$

où $\mathcal{P}_{m, M}$ est le projecteur sur l'état $|m, M\rangle$ et les coefficients $V_m = \langle m | V | m \rangle$, appelés *pseudopotentiels de Haldane* [Hal83a], donnent l'énergie d'interaction d'une paire d'électrons de moment cinétique relatif m dans le plus bas NL.

L'interaction lève partiellement la dégénérescence des NLs. Dans le plus bas NL, l'énergie cinétique des états à deux corps (1.89) est $\binom{N_B}{2}$ fois dégénérée à la valeur $\hbar\omega_c$. À l'inverse l'énergie d'interaction $V_m^{(0)}$ est $N_B - m$ fois dégénérée, car le moment cinétique total $m + M$ de la paire est limité par le moment cinétique maximal N_B imposé par la taille finie du système.

Calcul des pseudopotentiels Les pseudopotentiels V_m associés à l'interaction coulombienne

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad (1.93)$$

dépendent du NL considéré. Dans le plus bas NL ils s'obtiennent par intégration dans la représentation position

$$\begin{aligned} V_m^{(0)} &= \langle 0, m, 0 | V | 0, m, 0 \rangle \\ &= \iint V(r) |\psi_{0, m, 0}(z, Z)|^2 d\mathbf{r} d\mathbf{R} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4^m m!} \int_0^\infty V(r) r^{2m+1} e^{-\frac{r^2}{4}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m + 1)} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon l_B}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Dans les NLs plus élevés, les pseudopotentiels sont donnés par l'expression

$$V_m^{(n)} = \langle n, m, 0 | V | n, m, 0 \rangle = \iint V(r) |\psi_{n, m, 0}(z, Z)|^2 d\mathbf{r} d\mathbf{R}. \quad (1.95)$$

Notons qu'on préfère généralement faire ce calcul dans l'espace réciproque dans les NLs supérieurs.

Les premiers pseudopotentiels de l'interaction coulombienne dans le plus bas NL sont donnés par le tableau 1.4. L'interaction de Coulomb projetée dans le plus bas NL s'obtient à partir des pseudopotentiels

$$V_0(r) = \sum_m \int dZ |\psi_{0, m, 0}(z, Z)|^2 V_m = \sum_m V_m \frac{r^{2m}}{2\pi 2^m m! l_B} e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}}, \quad (1.96)$$

elle est tracée, de même que son homologue du second plus bas NL, sur la figure 1.19.

La différence de forme du potentiel d'interaction projeté entre les différents NLs mène à une variation importante des effets physiques. Par exemple, à $\nu = 1/2$ les conditions d'observation de l'EHQF ne sont pas les mêmes dans le plus bas NL (0NL) et dans le second plus bas NL (1NL). Les conséquences de ces différences seront abondamment discutées dans la suite de cet ouvrage.

m	0	1	2	3	4	5
$V_m^{(0)}$	0.886	0.443	0.332	0.277	0.242	0.218

TABLE 1.4 Premiers pseudopotentiels de l'interaction de Coulomb projetée dans le plus bas niveau de Landau, en unité de $e^2/(4\pi\epsilon l_B)$. Du fait de l'antisymétrie de la fonction d'onde, les électrons ne sont sensibles qu'aux composantes impaires, notées en gras.

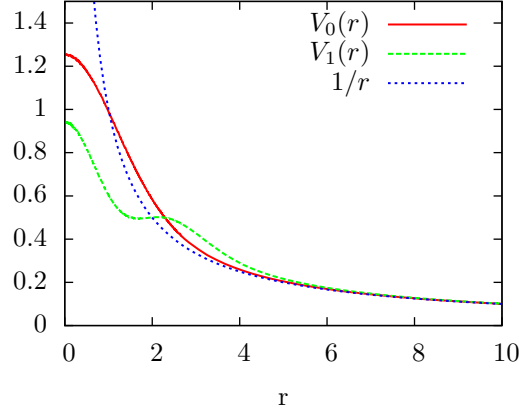


FIGURE 1.19 Interaction de Coulomb projetée dans les deux plus bas NLs. L'interaction nue $V(r) = 1/r$ est tracée à titre de comparatif. L'interaction est adoucie par la projection, et présente n minima locaux, où n est l'indice du NL. De plus la portée de l'interaction augmente avec n . L'unité d'énergie est $e^2/(4\pi\epsilon l_B)$.

1.3.2 Fonction d'onde de Laughlin

On a vu dans la section 1.2.2 que la partie polynomiale des fonctions d'onde du plus bas NL sont analytiques, dans la jauge symétrique. Ceci est la traduction dans l'espace des positions complexes de la condition $a|0, m\rangle = 0$. Pour cette raison, une fonction d'onde qui décrit N électrons dans le plus bas NL a nécessairement la forme suivante dans la jauge symétrique

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = P(z_1, \dots, z_N) \prod_k e^{-\frac{|z_k|^2}{4l_B^2}} \quad (1.97)$$

où P est un polynôme indépendant des positions conjuguées \bar{z}_j .

Sauf mention spécifique, dans toute la suite j'adopterai la mesure de Girvin et Jach [GJ84]

$$d\mu(\{z_i\}) = \prod_i \frac{e^{-\frac{|z_i|^2}{2l_B^2}}}{2\pi l_B^2} dx_i dy_i \quad (1.98)$$

qui déteste les fonctions d'onde des facteurs de normalisation et des termes gaussiens. Avec cette mesure la fonction d'onde (1.97) est réduite à sa partie polynomiale.

Afin de satisfaire aux conditions d'indiscernabilité des électrons et d'antisymétrie de la fonction d'onde, Ψ est contrainte à la forme

$$\Psi = P_s(z_1, \dots, z_N) \prod_{i < j} (z_i - z_j), \quad (1.99)$$

où P_s est un polynôme symétrique. L'invariance par rotation et la conservation du moment cinétique total $L_z = -i\hbar \sum_j \partial_{\theta_j}$ qui en découle impliquent que P_s est un polynôme homogène. On suppose que la fonction d'onde ne dépend que des distances relatives des électrons, et on pose

$$P_s = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p}, \quad (1.100)$$

où p est un entier naturel. Cette étape est la seule supposition du raisonnement, elle est motivée par la volonté de choisir un terme qui sépare les électrons au maximum afin de minimiser l'énergie d'interaction. Lorsqu'il l'a proposée Laughlin était éclairé par une étude détaillée de la fonction d'onde à trois électrons obtenue par diagonalisation numérique exacte, qu'il avait menée au préalable [Lau83b].

Pour chaque monôme de P , le moment cinétique individuel $L_z^{(i)} = -i\hbar \partial_{\theta_i}$ du i -ème électron est égal à l'exposant de z_i , sa valeur maximale est donc $(N-1) \times (2p+1)$. Or la valeur maximale du moment cinétique individuel est égale au nombre de quanta de flux N_B qui traversent le système. On a donc $2p+1 = N_B/(N-1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \nu^{-1}$, et le seul paramètre variationnel, p , se trouve fixé par le facteur de remplissage. La fonction d'onde ainsi obtenue

$$\Psi_L(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p+1} \quad \text{avec} \quad 2p+1 = \frac{1}{\nu} \quad (1.101)$$

porte le nom de R. Laughlin, qui la proposa en premier pour la description de l'EHQF [Lau83b]. Pour l'établir on a négligé des termes dans la partie polynomiale qui correspondent à des excitations virtuelles de type particule-trou du liquide de Laughlin, des « fluctuations de point zéro » de l'état de Laughlin. Malgré cette approximation, le recouvrement de cette fonction d'onde avec l'état fondamental du système – déterminé numériquement par diagonalisation de l'interaction de Coulomb dans le plus bas NL – est impressionnant dans les systèmes de petite taille ($|\langle \Psi_{\text{Coulomb}} | \Psi_L \rangle| > 99\%$ pour neuf électrons et moins⁵). La description de Laughlin résiste même à la prise en compte d'effets réalistes comme la largeur finie du potentiel de confinement. Le recouvrement de l'état de Laughlin avec l'état fondamental de l'interaction (1.13) illustre cette robustesse (Fig. 1.7).

Interaction modèle La fonction d'onde de Laughlin (1.101) est l'état fondamental, d'énergie nulle et non-dégénéré, d'une interaction modèle de cœur dur définie par

$$V_m^{\text{c.d.}} = \begin{cases} \Delta_{\text{c.d.}} & \text{pour } m < 1/\nu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.102)$$

On peut le voir en remarquant que dans l'état de Laughlin aucune paire d'électrons n'a un moment cinétique relatif inférieur à $1/\nu$, et l'interaction de courte portée est donc complètement écrantée. Cet écrantage de la partie courte portée est une indication supplémentaire de la robustesse de l'état de Laughlin pour décrire l'état fondamental de l'interaction de Coulomb.

La non dégénérescence de l'état fondamental de l'interaction de cœur dur (1.102) peut se comprendre par le fait que tout terme non contenu dans la fonction d'onde de Laughlin inclut au moins une paire de moment cinétique relatif inférieur à $1/\nu$, autrement le facteur de remplissage serait modifié. Ce terme coûte une énergie $\Delta_{\text{c.d.}}$.

5. Afin de juger la pertinence d'une fonction d'essai, il faut garder en tête que les espaces de Hilbert qui sont traités numériquement dans la littérature de l'EHQF ont une très grande dimension (jusque un milliard). Ainsi il convient de comparer les recouvrements donnés dans ce manuscrit avec le recouvrement entre l'état fondamental exact et un état aléatoire de l'espace de Hilbert. Par exemple, pour $N = 9$ électrons la probabilité qu'un état aléatoire ait un recouvrement avec l'état fondamental supérieur à celui de l'état de Laughlin est de l'ordre de $10^{-43.547}$ [Sou14].

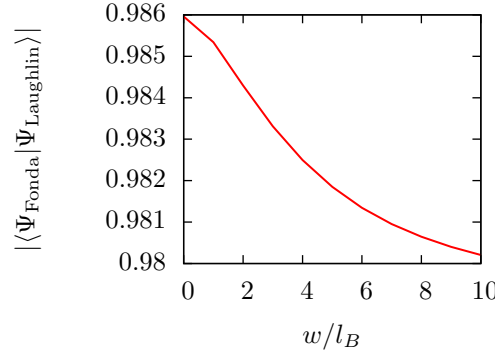


FIGURE 1.20 Recouvrement de l'état de Laughlin avec l'état fondamental d'un puits large pour $N = 10$ électrons, sur la sphère. L'état fondamental a été obtenu par diagonalisation exacte de l'interaction effective du puits large (1.13). J'ai négligé les sous-bandes excitées dans ce calcul; celles-ci sont notablement peuplées par l'état fondamental pour $w/l_B \gtrsim 5$ et réduisent donc le recouvrement par rapport à celui qui est montré ici. L'état de Laughlin a été généré numériquement par diagonalisation de l'interaction modèle (1.102).

Fonction de corrélation de paire Cet écrantage de la partie courte portée de l'interaction par la fonction de Laughlin peut également se voir dans la fonction de corrélation de paire. Celle-ci est définie, à partir de l'opérateur densité $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$,

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{N(N-1)}{n^2} \int d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N |\Psi_L(z_1, \dots, z_N)|^2. \quad (1.103)$$

Pour un système invariant par translation et par rotation, $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ne dépend que de la distance relative $r = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ et on la note alors $g(r)$. Dans l'équation (1.103) précédente, Ψ_L désigne la fonction de Laughlin normée munie de ses termes gaussiens, car la mesure considérée ici n'est pas la mesure de Girvin et Jach.

La fonction de corrélation de paire donne la probabilité de trouver un électron à une distance r d'un électron situé à l'origine. Celle de l'état de Laughlin est tracée sur la figure 1.21, à côté de celle de l'état fondamental de l'interaction de Coulomb obtenu numériquement pour un système de $N = 10$ particules. On remarque qu'alors que l'état de Laughlin décrit correctement le trou de corrélation à courte portée ($r \lesssim 4l_B$) de l'état exact, il ne tient pas compte des petites oscillations à longue portée dans la fonction de corrélation. Ces oscillations trahissent l'existence d'un quasi-ordre à longue portée dans l'état fondamental : les électrons sont en réalité légèrement corrélés au-delà de $r \approx 4l_B$. Nous verrons plus loin que dans la physique des effets Hall les états liquides sont en compétition étroite avec les états solides, notamment avec les cristaux de Wigner. Le quasi-ordre à longue portée de l'état fondamental exact traduit cet tendance à la cristallisation, il offre un compromis entre l'état liquide corrélé seulement aux courtes distance et l'état solide.

Excitations du liquide de Laughlin L'incompressibilité du liquide de Laughlin, qui explique l'observation de l'EHQF, est une conséquence de la nature inhabituelle de ses excitations. Un liquide est incompressible lorsque son potentiel chimique est discontinu en fonction de la densité. Pour montrer que le liquide de Laughlin vérifie cette propriété, on considère une variation infinitésimale de densité de flux δn_B . Celle-ci est équivalente à une variation infinitésimale de la densité donnée par $\delta n = -\nu \delta n_B$ car les deux variations aboutissent au même facteur de remplissage

$$\nu = \frac{n}{n_B + \delta n_B} = \frac{n}{n_B} \left(1 - \frac{\delta n_B}{n_B} \right) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\delta n_B}{n_B} \right)^2 \right) = \frac{n - \nu \delta n}{n_B} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\delta n_B}{n_B} \right)^2 \right). \quad (1.104)$$

L'ajout d'un quantum de flux à l'origine, qui réduit donc la densité, augmente le moment cinétique de

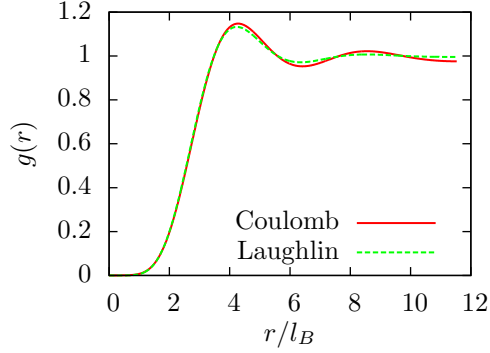


FIGURE 1.21 Fonction de corrélation de paire de l'état fondamental de l'interaction de Coulomb à $\nu = 1/3$ et de l'état de Laughlin, pour un système de $N = 10$ électrons. L'état de Laughlin reproduit correctement le trou de corrélation à courte distance, mais il sous-estime les oscillations à plus grande distance $r \gtrsim 4l_B$.

chaque électron d'une unité (voir section 1.2.3). Comme l'exposant de la position z_i est la valeur propre du moment cinétique individuel $L_z^{(i)}$, l'insertion du quantum de flux revient à multiplier la fonction d'onde par la position de tous les électrons

$$\Psi_L \mapsto \prod_k z_k \Psi_L \quad (1.105)$$

L'insertion d'un quantum de flux en z_0 est obtenu par translation $z_k \mapsto z_k - z_0$. La fonction d'onde associée à cette excitation, dite *quasi-trou*, est

$$\Psi_{q.t.} = \prod_k (z_k - z_0) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/\nu} \quad (1.106)$$

où ν est le facteur de remplissage avant insertion du quantum de flux.

Cette excitation correspond au retrait d'une charge fractionnaire $-e^* = -\nu e$. Ceci peut se voir en intégrant l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = e \partial_t n \quad (1.107)$$

sur un disque de rayon r très large centré sur le quasi-trou. Au cours de l'insertion du quantum de flux toutes les orbites de Landau sont translatées vers l'orbite immédiatement supérieure. Étant donné que chaque orbite de Landau est en moyenne occupée par une densité ν d'électrons, une charge $-\nu e$ quitte le disque au cours du processus. Le quasi-trou porte donc une charge fractionnaire $e^* = \nu e$, localisée sur une longueur $\sim 2,5l_B$ autour de l'origine [JPacBS14]. La charge fractionnaire des excitations du liquide de Laughlin a été observée à travers des mesures de bruit de grenaille dans un SBE entravé d'une constriction [SGJE97].

Il faut cependant garder en tête que, quelque soit l'endroit où l'on introduit le quantum de flux et donc l'excitation, celle-ci est libre de se déplacer. Néanmoins c'est la localisation de ces quasi-particules par les impuretés qui est responsable de l'accrochage de la résistance de Hall, de la même manière que la quantification de la résistance de Hall dans l'EHQE reflète la localisation des électrons (ou trous) dans un NL adjacent.

Le retrait d'un quantum de flux, quant à lui, correspond à une augmentation de la densité et produit un *quasi-électron*. Le retrait d'un quantum de flux est équivalent à l'insertion d'un quantum de flux $\mathbf{B}_{\phi_0} = -\phi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z$ dans la direction opposée au champ magnétique. D'après la discussion de la section 1.2.3, cette insertion est produite par un potentiel vecteur $\mathbf{A}_{\phi_0} = -\phi_0 \mathbf{e}_\theta / 2\pi r$. Cela a pour effet de multiplier chaque orbite de Landau par un facteur $\exp(-i\phi\theta/\phi_0) = (\bar{z}/|z|)^{\phi/\phi_0}$, et donc d'adjoindre un facteur

$$\prod_k \bar{z}_k \quad (1.108)$$

aux fonctions d'onde à N -corps. Cependant, l'apparition de termes non analytiques \bar{z}_i trahit la présence de composantes n'appartenant pas au plus bas NL. On se débarrasse de cet artefact par projection dans le plus bas NL [GJ84], réalisée en remplaçant les composantes non analytiques de la fonction d'onde par des dérivées⁶

$$\bar{z}_k \longmapsto 2\partial_{z_k}. \quad (1.109)$$

Finalement, la fonction d'onde du quasi-électron situé à l'origine s'écrit [Jai07]

$$\Psi_{\text{q.e.}} = \prod_k (2\partial_{z_k}) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/\nu} \quad (1.110)$$

La translation du quasi-électron en z_0 est obtenue par substitution $\bar{z}_k \longmapsto \bar{z}_k - \bar{z}_0 \xrightarrow{\text{PBNL}} 2\partial_{z_k} - \bar{z}_0$. Le terme \bar{z}_0 ne correspond pas à la position d'un électron (c'est simplement un paramètre complexe) et la fonction d'onde

$$\Psi_{\text{q.e.}} = \prod_k (2\partial_{z_k} - \bar{z}_0) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/\nu} \quad (1.111)$$

reste donc dans le plus bas NL.

Les énergies du quasi-trou et du quasi-électron sont déterminées en intégrant le potentiel d'interaction de Coulomb dans les états correspondants par méthode Monte-Carlo, puis en les extrapolant à la limite thermodynamique [MH86]. Elles valent $E_{\text{q.t.}} \simeq 0,027$ et $E_{\text{q.e.}} \simeq 0,073$. La discontinuité du potentiel chimique à $\nu = 1/3$ est donnée par

$$\Delta\mu = \mu_+ - \mu_- = \lim_{N_B \rightarrow \infty} [E(N_B) - E(N_B - 1)] - \lim_{N_B \rightarrow \infty} [E(N_B) - E(N_B + 1)] = E_{\text{q.e.}} - E_{\text{q.t.}} \simeq 0,046. \quad (1.112)$$

C'est cette discontinuité qui assure l'incompressibilité du liquide de Laughlin *via* l'équation (1.79)

$$\kappa^{-1} = n\partial_\nu \mu \longrightarrow \infty \quad (1.113)$$

qui explique l'existence de l'EHQF à $\nu = 1/3$.

1.3.3 Le rôle du spin dans l'effet Hall quantique fractionnaire

J'ai omis le spin de l'électron dans tout ce qui précède, et ferai de même par la suite. La polarisation est une caractéristique quasi universelle des états qui manifestent l'EHQF, avec quelques exceptions notables, notamment à $\nu = 2/3$, $\nu = 2 - 2/3$ et $\nu = 2 - 2/5$. À cause de la présence du champ magnétique, on pourrait être tenté de justifier cette polarisation par l'effet Zeeman. En réalité, l'énergie Zeeman de retournement de spin $E_Z = g\mu_B B = 0,026B[\text{T}]$ meV (pour l'AsGa avec $g = -0,4$) est très faible par rapport à toutes les autres échelles d'énergies et peut être négligée. Ce sont alors les interactions qui polarisent le système par un mécanisme de type Hund semblable au ferromagnétisme dans les métaux [GV05]. Je me contenterai pour justifier ce point de calculer l'énergie d'interaction moyenne entre électrons de spins σ et σ' à $\nu = 1$. Celle-ci se limite au terme d'échange

$$E_X^{\nu=1} = -\frac{n}{2} \int \mathbf{r} \mathbf{r}' \langle \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}') \rangle \langle \psi_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_\sigma(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.114)$$

6. La forme de l'opérateur de projection peut se comprendre comme suit. L'opérateur d'incrément du moment cinétique de la particule i s'écrit $b_i^\dagger = (2\partial_{\bar{z}_i} + z_i/2)/\sqrt{2}$, soit $b_i^\dagger = z_i/2\sqrt{2}$ dans le plus bas NL. L'opérateur adjoint $b_i = (2\partial_{z_i} + \bar{z}_i/2)/\sqrt{2}$ connecte à des états des NLs supérieurs à cause du terme \bar{z}_i . Pour éviter ceci on choisit pour l'opérateur de réduction de moment cinétique $b_i = 2\partial_{z_i}/\sqrt{2}$. C'est par lui que la fonction d'onde doit être multipliée (à gauche) pour diminuer le moment cinétique de chaque électron d'une unité, lors du retrait du quantum de flux. Ce point est traité en détail dans l'annexe A de la référence [Gir99].

en unités de $e^2/4\pi\epsilon l_B$, car le terme direct est compensé par le fond ionique uniforme sous-jacent au SBE. Cette énergie d'échange est nulle pour les spins anti-parallèles, car $\langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}') \rangle = 0$. Pour des spins parallèles, on peut la calculer en remarquant qu'elle est reliée à la fonction de corrélation de paire [GV05]

$$E_X^{v=1} = \frac{n}{2} \int d\mathbf{r} [g(r) - 1] V(r) = \frac{v}{2} \int_0^{\infty} r dr [g(r) - 1] \frac{1}{r}, \quad (1.115)$$

qui est donnée par

$$g_{v=1}(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}. \quad (1.116)$$

L'énergie d'échange vaut donc

$$E_X = -\frac{v}{2} \int_0^{\infty} dr e^{-\frac{r^2}{2}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \simeq -0,62 \quad (1.117)$$

soit $E_X \simeq -2,7\sqrt{B[\text{T}]} \text{ meV}$, pour l'AsGa avec $\epsilon = 13\epsilon_0$. Le terme d'échange abaisse donc fortement l'énergie de spins parallèles. Ce gain énergétique est dû au fait que la symétrie de la partie spinorielle de la fonction d'onde implique l'antisymétrie de sa partie spatiale, ce qui assure une plus grande séparation des électrons. On notera que, pour les champs magnétiques réalistes, l'énergie d'échange est un à deux ordres de grandeur supérieure par rapport à l'énergie Zeeman.

Notons enfin que cet argument fait intervenir les électrons dans un seul NL (le plus bas ici). Contrairement au ferromagnétisme dans les métaux habituels, la polarisation est complète car elle n'est pas accompagnée d'un coût en énergie cinétique.

Chapitre 2

Fonctions modèles pour l'effet Hall quantique fractionnaire

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF) l'énergie cinétique est gelée et n'influence pas les propriétés de basse énergie du système en première approximation. Pour cette raison les corrélations entre électrons sont importantes et, comme pour tous les problèmes fortement corrélés, les méthodes perturbatives ne parviennent pas à décrire le système. Les méthodes variationnelles leur sont préférées. Plus que dans n'importe quel autre domaine de la Physique, les fonctions modèles sont l'outil théorique le plus prolifique de l'étude, ardue, de l'EHQF. Dans ces méthodes variationnelles, on décrit l'état fondamental du système par une fonction d'onde modèle dont les paramètres sont obtenus par minimisation de l'énergie.

La fonction de Laughlin constitue l'exemple canonique de ces fonctions d'onde modèles. R. Laughlin la proposa après une étude détaillée des corrélations électroniques basée sur des résultats numériques pour des systèmes de petite taille [Lau83b]. Comme je l'ai exposé dans le chapitre précédent, il détermina les contraintes imposées par les symétries sur la forme de la fonction d'onde, puis il en donna l'expression, fort de l'étude de ces corrélations. Pour les systèmes de petite taille cet état a un recouvrement proche de un avec l'état fondamental réel, déterminé par diagonalisation numérique exacte de l'interaction de Coulomb. De plus cette fonction a permis de prédire l'existence de quasi-particules de charge fractionnaire, et sa généralisation – la théorie des fermions composites (FCs) – a pu expliquer la plupart des valeurs du facteur de remplissage auxquelles l'EHQF est observé.

L'EHQF a également été observé à des facteurs de remplissage qui ne rentrent pas dans la séquence de Laughlin ou des FCs. D'autres fonctions modèles ont donc été proposées. Parmi celles-ci, trois sont considérées dans ce manuscrit : les fonctions de Halperin [Hal83b], qui sont des généralisations de la fonction de Laughlin aux systèmes multicomposantes, et les états de Haldane-Rezayi et Moore-Read, toutes deux introduites pour décrire l'EHQF observé à $\nu = 5/2$ [WPR⁺90].

Les états mentionnés dans le paragraphe précédent sous-tendent l'EHQF. Ils sont en compétition énergétique étroite avec deux états modèles dont les propriétés sont différentes. Le liquide de Fermi de fermions composites (LFFC), prototype de l'état métallique observé à $\nu = 1/2$ [WES⁺87, JSI⁺89], est l'un de ceux-ci. Enfin, des états de densité inhomogène sont également pertinents, comme les cristaux de Wigner et les cristaux de bulles ou de rubans. Dans ces états les électrons forment un réseau afin de s'éviter au maximum et ainsi minimiser leur énergie d'interaction. Ces états inhomogènes ont un comportement isolant, car le cristal électronique est accroché par les impuretés. Dans le présent chapitre, je rappellerai les fonctions

d'onde principales dans l'étude de l'EHQE, notamment à demi-remplissage. De plus, je passerai en revue les états cristallins (cristal de Wigner, cristaux de bulles et rubans) dans les systèmes à une et deux composantes.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Hamiltonien d'interaction projeté dans un seul niveau de Landau

Dans la section 1.3.1, j'avais entamé l'étude des interactions en présence d'un champ magnétique en introduisant les pseudopotentiels de Haldane et le potentiel d'interaction projeté dans un NL donné. Je poursuis ici cette étude avec un bref rappel de la discussion sur les pseudopotentiels, suivi de la description des opérateurs densité projetés qui nous serviront par la suite.

On suppose $\hbar\omega_c \gg e^2/(4\pi\epsilon l_B)$, de telle sorte que les NLs inférieurs au dernier NL partiellement rempli sont remplis et « inertes ». Sous cette condition les états à deux corps sont indicés par leur NL n , leur moment cinétique total M et leur moment cinétique relatif m . En utilisant le projecteur sur le n -ième NL $\sum_{M,m} |n, M, m\rangle \langle n, M, m| = \mathbb{1}$ on peut réécrire tout potentiel d'interaction $V(r)$ invariant par translation selon

$$V_n(r) = \sum_{m,m'} \sum_{M,M'} \langle \mathbf{r} | n, M, m \rangle \underbrace{\langle n, M, m | V | n, M', m' \rangle \langle n, M', m' | \mathbf{r} \rangle}_{= V_m^{(n)} \delta_{m,m'} \delta_{M,M'}} = \sum_{m,M} V_m^{(n)} |\langle \mathbf{r} | n, M, m \rangle|^2, \quad (2.1)$$

où l'égalité

$$\langle n, m | V | n, m' \rangle = V_m^{(n)} \delta_{m,m'} \delta_{M,M'} \quad (2.2)$$

découle de l'invariance supposée du potentiel d'interaction vis-à-vis des rotations. Les coefficients $V_m^{(n)} = \langle n, M, m | V | n, M, m \rangle$ sont les pseudopotentiels de Haldane, que l'on a déterminés dans le plus bas NL dans le chapitre 1.

Dans l'espace réel le potentiel projeté est donc une combinaison linéaire des densités de probabilité des orbites de Landau, dont les poids sont les pseudopotentiels correspondants.

Le tracé de l'interaction de Coulomb projetée dans les deux plus bas NLs, sur la figure 2.1a, montre que la projection dans un NL en adoucit la partie courte portée. Dans le plus bas NL, c'est la répulsion à courte distance qui stabilise l'état de Laughlin, lequel est l'état fondamental d'une interaction de « cœur dur » (voir section 1.3). On voit apparaître des plateaux dans l'interaction projetée dans les NLs excités, qui induisent une différence qualitative avec le potentiel de Coulomb pur et favorisent des états appariés. Des exemples de tels états appariés, qui profitent du plateau du potentiel effectif du second NL pour rapprocher les particules par paires, sont présentés dans la suite.

Hamiltonien projeté Dans l'approximation du jellium, présentée dans l'annexe B, le potentiel d'interaction coulombien dans l'espace réciproque s'écrit

$$V_{\text{jellium}} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(q) [\rho(-\mathbf{q})\rho(\mathbf{q}) - \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}}]; \quad (2.3)$$

où $v(q) = 2\pi/q$ est la transformée de Fourier du potentiel de Coulomb,

$$\rho(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{k}} c^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{k}) c(\mathbf{k}) \quad (2.4)$$

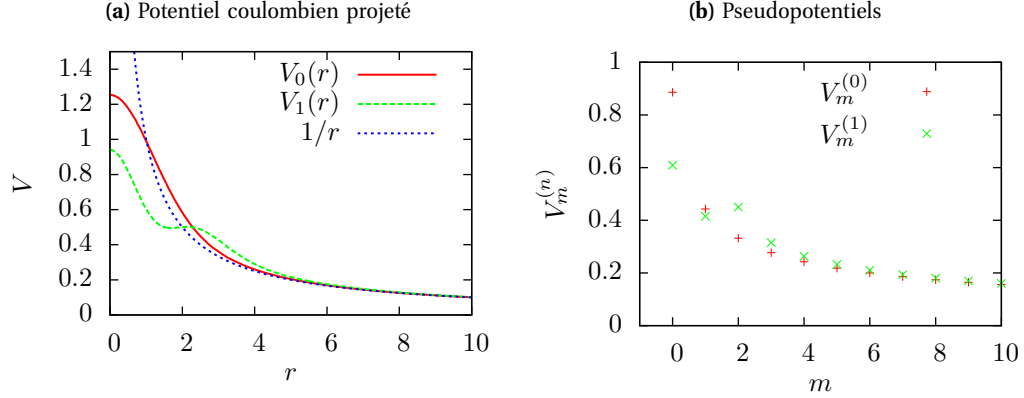


FIGURE 2.1 Potentiel d'interaction coulombien projeté dans les deux plus bas NLs, et pseudopotentiels associés. Le potentiel projeté dans le n -ième NL présente n minimas locaux, et tendent tous vers le potentiel de Coulomb $V_C(r) = 1/r$ à grande distance.

la transformée de Fourier de l'opérateur densité $\rho(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$, et A désigne l'aire du système. La restriction à un seul NL est obtenue en projetant $\rho(\mathbf{q})$ dans le plus bas NL. Le hamiltonien projeté s'obtient, comme le potentiel de Coulomb projeté, en utilisant la relation de fermeture de la base des orbites de Landau, puis en ne gardant que les termes correspondants au NL qui nous intéresse. On développe cette procédure dans la jauge de Landau – dans laquelle les états propres du hamiltonien s'écrivent $|n, k_y'\rangle$ – pour des raisons pratiques qui apparaîtront lors des calculs Hartree-Fock à venir

$$\rho_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{k_y', k_y''} \langle n, k_y' | \mathbf{q} + \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | n, k_y'' \rangle c_{n, k_y}^\dagger c_{n, k_y'} \quad (2.5)$$

Après quelques manipulations algébriques, fastidieuses mais qui ne présentent pas de difficulté, on obtient (correction de l'exercice 9.1 de la référence [Yos02])

$$\rho_n(\mathbf{q}) = F_n(q) \sum_{\mathbf{k}} e^{-iq_y k l_B^2} c_{\mathbf{k} + \frac{q_x}{2}}^\dagger c_{\mathbf{k} - \frac{q_x}{2}}, \quad (2.6)$$

où c_k est une abbréviation pour $c_{n, k}$,

$$F_n(q) = L_n \left(\frac{q^2 l_B^2}{2} \right) e^{-\frac{q^2 l_B^2}{4}} \quad (2.7)$$

est le facteur de forme du n -ième NL, et L_n désigne les polynômes de Laguerre définis dans la section 1.2.2. On définit généralement l'opérateur

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{-iq_y k l_B^2} c_{\mathbf{k} + \frac{q_x}{2}}^\dagger c_{\mathbf{k} - \frac{q_x}{2}} \quad (2.8)$$

que l'on appelle, par métonymie, opérateur densité projeté. En utilisant celui-ci le hamiltonien projeté dans le n -ième NL s'écrit finalement

$$V = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n(q) [\bar{\rho}(-\mathbf{q})\bar{\rho}(\mathbf{q}) - \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{0}}] ; \quad (2.9)$$

où l'on a introduit le potentiel d'interaction effectif dans le n -ième NL

$$v_n(q) = v(q) [F_n(q)]^2 \quad (2.10)$$

qui absorbe le facteur de forme $F_n(q)$.

On appellera hamiltonien projeté dans le n -ième NL l'opérateur (2.9), cependant il faut garder en mémoire que c'est un abus de langage dans la mesure où la projection du hamiltonien d'interaction (2.3) dans le n -ième NL donne

$$V_{\text{proj.}} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(q) [\mathcal{P}_n \rho(-\mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}) \mathcal{P}_n - \delta_{\mathbf{q},0}] \quad (2.11)$$

qui est différent de (2.9) car

$$\mathcal{P}_n \rho(-\mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}) \mathcal{P}_n \neq \mathcal{P}_n \rho(-\mathbf{q}) \underbrace{\mathcal{P}_n \mathcal{P}_n}_{=\mathcal{P}_n} \rho(\mathbf{q}) \mathcal{P}_n = \rho_n(-\mathbf{q}) \rho_n(\mathbf{q}). \quad (2.12)$$

Dans la littérature relative à l'EHQF, la référence au hamiltonien projeté est en réalité un abus de langage, car c'est l'opérateur densité qui est projeté dans un NL donné, et la projection d'un opérateur au carré est différente du carré d'un opérateur projeté.

La forme (2.9) du hamiltonien d'interaction projeté dans le n -ième NL nous sera très utile pour les calculs Hartree-Fock à l'aide desquels on détermine l'énergie des cristaux de Wigner en champ magnétique.

2.1.2 Le « shift » topologique

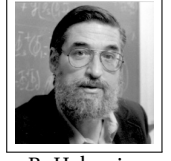
Lors de l'introduction de la fonction de Laughlin dans la section 1.3, on a montré que celle-ci décrit, à la limite thermodynamique, un système à remplissage $\nu = 1/3$. Dans le cas d'un nombre fini d'électron N et sur les surfaces de genre zéro, il existe un décalage, ou « shift », entre le rapport N/N_B et le facteur de remplissage ν . D'autres géométries telles que le tore ne présentent pas ce shift, mais elles ne seront pas considérées dans ce manuscrit. On a vu dans la section 1.2.2 que le nombre de quanta de flux est égal au moment cinétique individuel maximal, or le moment cinétique individuel d'une particule est donné par l'exposant de sa position complexe dans la fonction d'onde. Dans le cas de la fonction de Laughlin (1.101) cet exposant maximum vaut $N_B = 3(N-1) = \nu^{-1}N - 3$. On définit le shift δ d'une fonction d'essai par la relation

$$N_B = \nu^{-1}N + \delta. \quad (2.13)$$

Celui de la fonction de Laughlin vaut donc $\delta_L = -3$, et celui des autres fonctions d'essai sera calculé de la même manière, par comptage des exposants maximums des positions complexes.

2.2 États de Halperin

Les états de Halperin [Hal83b] sont la généralisation de l'état de Laughlin (1.101) aux systèmes *multicomposantes*. Un système est dit multicomposante lorsque les électrons possèdent des degrés de liberté supplémentaires à ceux qui décrivent les translations dans le plan ; par exemple le spin, l'indice de couche d'une bicouche, la sous-bande d'un puits large, ou encore la vallée dans le graphène. Dans ce manuscrit on néglige le spin, et seront considérés les cas de la bicouche et du puits large. Ils amènent un degré de liberté supplémentaire par rapport à ceux du plan, qui sera décrit par un *pseudospin* σ .



B. Halperin.

Les fonctions de Halperin à deux composantes décrivent un système dans lequel N_\uparrow (resp. N_\downarrow) électrons ont \uparrow (resp. \downarrow) pour pseudospin, et s'écrivent

$$\Psi_{(m_\uparrow m_\downarrow n)}([z]) = \mathcal{A} \left[\Phi_{(m_\uparrow m_\downarrow n)}([z]) \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{N_\uparrow} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_{N_\downarrow} \right] \quad (2.14)$$

où \mathcal{A} est l'opérateur d'anti-symétrisation, et $[z] = (z_1, \dots, z_N)$ désigne l'ensemble des positions complexes. La partie orbitale Φ est un produit de facteurs de Jastrow tels que ceux qui apparaissent dans la fonction de Laughlin

$$\Phi_{(m_\uparrow m_\downarrow n)}([z]) = \underbrace{\prod_{j < k} (z_j - z_k)^{m_\uparrow}}_{=J_{\uparrow\uparrow}^{m_\uparrow}} \underbrace{\prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^{m_\downarrow}}_{=J_{\downarrow\downarrow}^{m_\downarrow}} \underbrace{\prod_{l, \gamma} (z_l - z_\gamma)^n}_{=J_{\uparrow\downarrow}^n}, \quad (2.15)$$

où les produits de positions avec des indices latins (z_j, z_k et z_l) se font sur $\llbracket 1, N_\uparrow \rrbracket$, et ceux d'indices grecques (z_α, z_β et z_γ) sur $\llbracket N_\uparrow + 1, N \rrbracket$. La notation $J_{\sigma\sigma'}^p$ introduite dans l'équation (2.15) indique les *facteurs de Jastrow*, omniprésents dans les fonctions d'essai de l'EHQF. Dans toute la suite on fera régulièrement un raccourci de langage en amalgamant les fonctions de Halperin Ψ à leurs parties orbitales Φ .

Les paramètres m_\uparrow, m_\downarrow et n décrivent les corrélations entre électrons de même pseudospin (m_\uparrow et m_\downarrow) et entre électrons de pseudospin opposé (n). Comme pour la fonction de Laughlin, le principe de Pauli interdit les valeurs paires de m_\uparrow et m_\downarrow .

Facteur de remplissage Le facteur de remplissage correspondant à un jeu de paramètres $(m_\uparrow, m_\downarrow, n)$ est déterminé comme dans le cas mono-composante, en utilisant le fait que la puissance maximal d'une variable correspond au nombre de quanta de flux N_B . On trouve

$$(N_\uparrow - 1)m_\uparrow + N_\downarrow n = N_B \quad (2.16)$$

et

$$(N_\downarrow - 1)m_\downarrow + N_\uparrow n = N_B. \quad (2.17)$$

Ceci se réécrit, en notation matricielle

$$\begin{pmatrix} N_B \\ N_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_\uparrow & n \\ n & m_\downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_\uparrow \\ N_\downarrow \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_\uparrow \\ m_\downarrow \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

et s'inverse comme suit

$$N_\uparrow = \frac{m_\downarrow - n}{m_\uparrow m_\downarrow - n^2} (N_B + m_\uparrow), \quad N_\downarrow = \frac{m_\uparrow - n}{m_\uparrow m_\downarrow - n^2} (N_B + m_\downarrow). \quad (2.19)$$

Le nombre de particules N est donc relié au nombre de quanta de flux N_B par

$$N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = \frac{m_{\uparrow} + m_{\downarrow} - 2n}{m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n^2} N_B + \frac{2m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n(m_{\uparrow} + m_{\downarrow})}{m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n^2} \quad (2.20)$$

soit

$$N_B = \underbrace{\left(\frac{m_{\uparrow} + m_{\downarrow} - 2n}{m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n^2} \right)^{-1}}_{=v^{-1}} N - \underbrace{\frac{2m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n(m_{\uparrow} + m_{\downarrow})}{m_{\uparrow} + m_{\downarrow} - 2n}}_{=\delta}. \quad (2.21)$$

Dans cette expression on identifie le facteur de remplissage

$$v_{(m_{\uparrow} m_{\downarrow} n)} = \frac{m_{\uparrow} + m_{\downarrow} - 2n}{m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n^2}, \quad (2.22)$$

et le shift

$$\delta_{(m_{\uparrow} m_{\downarrow} n)} = -\frac{2m_{\uparrow} m_{\downarrow} - n(m_{\uparrow} + m_{\downarrow})}{m_{\uparrow} + m_{\downarrow} - 2n}, \quad (2.23)$$

toujours par identification avec la définition du shift (2.13).

Enfin on note que dans le cas symétrique $m_{\uparrow} = m_{\downarrow} = m$, le facteur de remplissage vaut

$$v_{(mmn)} = \frac{2}{m+n} \quad (2.24)$$

et le shift vaut simplement $\delta_{(mmn)} = -m$.

Dans la suite, une attention particulière sera accordée à la fonction de Halperin $\Psi_{(331)}$ pour des raisons qui apparaîtront ensuite. Elle correspond à un remplissage demi-entier des NLs et a pour shift -3 . Ses fonctions de corrélations, tracées sur la figure 2.2, montre qu'elle décrit un état dans lequel les électrons de spin opposé s'évitent de manière moins prononcée que les électrons de spin identique.

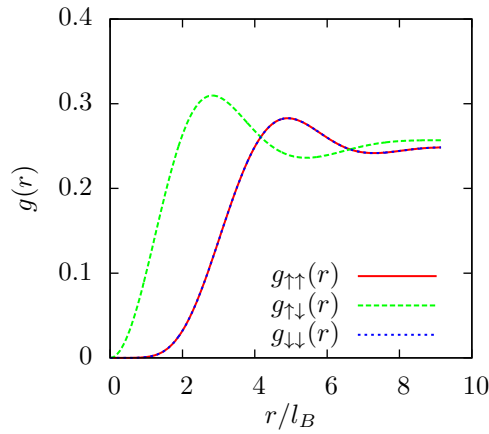


FIGURE 2.2 Fonction de corrélation de l'état de Halperin (331) pour $N = 10$ électrons, sur la sphère. Le trou de corrélation est plus important entre électrons de même spin ($g_{\uparrow\uparrow}$ et $g_{\downarrow\downarrow}$) qu'entre électrons de spins opposés ($g_{\uparrow\downarrow}$). Dans le secteur inter-composante, $g_{\uparrow\downarrow}$ est aussi la fonction de corrélation d'un système polarisé à $\nu = 1$ donnée par l'équation (1.116), tandis que dans le secteur intra-composante, $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow}$ est identique à la fonction de corrélation de l'état de Laughlin (1.103).

Cas particuliers Les fonctions de Halperin décrivent des états propres de S_z , mais qui ne sont états propres de S^2 en général. Deux exceptions notables sont

- la séquence $m_\uparrow = m_\downarrow = n$, qui décrit simplement un état de Laughlin agrémenté d'une structure spinorielle. L'antisymétrie de la partie spatiale impose la symétrie de la partie spinorielle : ce sont des états complètement polarisés, et donc $S^2\Psi_{(mmm)} = N(N+1)\Psi_{(mmm)}$, où N est le nombre d'électrons.
- les valeurs $m_\uparrow = m_\downarrow = m = n+1$. Dans ce cas on peut réécrire les fonctions de Halperin comme

$$\Phi_{(mmn)} = J^2 \times J_{\uparrow\uparrow} \times J_{\downarrow\downarrow} \quad (2.25)$$

c'est-à-dire le produit d'un polynôme symétrique $J^2 = \prod_{i < j < N} (z_i - z_j)^2$ qui fait intervenir *toutes* les positions, et de deux déterminants de Slater $J_{\uparrow\uparrow} = \prod_{i < j \leq N_\uparrow} (z_i - z_j)$ et $J_{\downarrow\downarrow} = \prod_{i < j \leq N_\downarrow} (z_i - z_j)$, un pour chaque espèce de spin. En vertu du principe de Pauli, la partie spinorielle doit donc être un singulet, qui vérifie $S^2\Psi_{(mmn)} = 0$.

L'état de Halperin (331) n'appartient pas à ces deux séquences, il n'est donc pas état propre de S^2 et en tant que tel ce n'est pas un bon candidat pour l'état fondamental d'une interaction SU(2)-symétrique. En revanche il peut être pertinent pour une bicouche ou un puits large dont l'interaction effective n'a pas la symétrie SU(2).

Quasi-particules On a vu lors de la présentation de la fonction de Laughlin (section 1.3) que le quasi-trou en z_0 est obtenu par insertion virtuel d'un quantum de flux, décrit par la multiplication de la fonction d'onde par un facteur $\prod_j (z_j - z_0)$. Il y a deux équivalents pour les fonctions de Halperin, un par secteur de spin. Le quasi-trou de spin \uparrow s'écrit par

$$\Psi_{\text{q.t.}\uparrow}(z_0) = \prod_{j=1}^{N_\uparrow} (z_j - z_0) \times \Psi_{(m_\uparrow m_\downarrow n)} \quad (2.26)$$

Les orbites des électrons de pseudospin \uparrow sont augmentées d'une unité par l'insertion du quantum de flux. Ceci a pour effet d'exclure v_\uparrow charges du système ; le quasi-trou de spin \uparrow a donc une charge ev_\uparrow .¹ Les remplissages partiels $v_{\uparrow\downarrow}$ s'obtiennent à partir de l'équation (2.19), ils valent

$$v_\uparrow = \frac{m_\downarrow - n}{m_\uparrow m_\downarrow - n^2}, \quad v_\downarrow = \frac{m_\uparrow - n}{m_\uparrow m_\downarrow - n^2}. \quad (2.27)$$

Interaction modèle L'interaction modèle dont l'unique état fondamental est la fonction de Halperin d'indices $(m_\uparrow m_\downarrow n)$ est construite sur le modèle de celle qui génère l'état de Laughlin, donnée par l'équation (1.102). L'interaction modèle de la fonction de Halperin n'est pas invariante par rotation dans l'espace de (pseudo)spin, on doit donc en spécifier les pseudopotentiels dans les différents secteurs

$$\left. \begin{aligned} V_m^{\uparrow\uparrow} &= \Delta_{\text{c.d.}} \text{ si } m < m_\uparrow \\ V_m^{\downarrow\downarrow} &= \Delta_{\text{c.d.}} \text{ si } m < m_\downarrow \\ V_m^{\uparrow\downarrow} &= \Delta_{\text{c.d.}} \text{ si } m < n \end{aligned} \right\} = 0 \quad \text{sinon.} \quad (2.28)$$

Numériquement, on diagonalise cette interaction modèle pour générer l'état de Halperin correspondant.

1. Un traitement des quasi-trous par le biais de l'analogie plasma permet de plus de connaître la répartition de cette charge sur les deux composantes (voir [SP08], section 5.4).

2.3 Liquide de Fermi de fermions composites et états appariés

La compréhension de l'EHQF bénéficie grandement de l'existence de la théorie des fermions composites (FCs). Ces particules effectives ont été introduites par Jain en 1989 [Jai89]; il les définit lui-même comme « un état lié d'un électron avec un nombre pair de vortex quantifiés » [Jai07]. Schématiquement, les FCs sont des électrons qui transportent une partie du flux magnétique – les vortex quantifiés – et ne ressentent que le champ magnétique, amoindri, qu'ils n'« absorbent » pas. Le champ magnétique effectif ressenti par les FCs peut correspondre à un remplissage entier des NLs, dans ce cas les FCs présentent l'EHQE. L'EHQF est alors interprété comme un EHQE de FCs.

Un cas qui nous intéresse particulièrement est celui du demi-remplissage des NLs, car alors les FCs capturent l'intégralité du flux magnétique. Les FCs peuvent ainsi être vus comme des particules dans un champ magnétique effectif nul. Dans ce cas il y a compétition entre un liquide de Fermi (métal de FCs) [JSI⁺89, WPR⁺90, WRWP93, HLR93], et des état appariés (supraconducteur de FCs) qui peuvent éventuellement être favorisés par les interactions résiduelles entre FCs [WES⁺87, GWW91, MR91, HR88]. L'issue de cette compétition semble donner le liquide de Fermi de fermions composites (LFFCs) vainqueur dans le plus bas NL, et l'état apparié triplet dans le second NL.

2.3.1 Fermions composites

La théorie des FCs produit des généralisations de la fonction d'onde de Laughlin (1.101), et elle est centrée sur l'attachement fictif d'une partie du flux magnétique aux positions des électrons. Cette théorie est construite comme suit.

On commence par écrire la fonction d'onde d'un NL rempli, qui est le déterminant de Slater des orbites de Landau (1.53). Toujours avec la mesure d'intégration (1.98) – qui déteste les fonctions d'ondes des termes gaussiens et des facteurs de normalisation – on obtient



J. Jain.

$$\Psi_{v=1}(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} z_1^0 & \dots & z_N^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N_B-1} & \dots & z_N^{N_B-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j). \quad (2.29)$$

Au vu de cette expression, on remarque que la fonction d'onde de Laughlin (1.101) peut s'écrire

$$\Psi_L(z_1, \dots, z_N) = \Psi_{v=1}(z_1, \dots, z_N) \times \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p}, \quad (2.30)$$

où $2p + 1 = \nu^{-1}$. La fonction de Laughlin peut donc s'interpréter comme la fonction d'onde d'un NL rempli, moyennant la présence du terme

$$\prod_k (z_j - z_k)^{2p}, \quad (2.31)$$

qui décrit un vortex et produit une variation de phase de $2p \times 2\pi$ lorsqu'une particule fait un tour complet autour d'une autre. Ces vortex sont topologiquement équivalents à ceux produits par l'insertion de $2p$ quanta de flux en chaque position z_i .

Pour comprendre cette dernière affirmation, je rappelle que dans la section 1.2.3, on a vu qu'un potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_\phi = \frac{2p\phi_0}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (2.32)$$

rend compte de la présence d'un flux magnétique $2p\phi_0$ localisé en \mathbf{r}_k , $\mathbf{B}_\phi = \phi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)\mathbf{e}_z$. Sous réserve que l'insertion du flux soit adiabatique, les fonctions d'ondes sont multipliées par un facteur $e^{-i\theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)2p}$. L'attachement de flux magnétique aux positions de tous les électrons est donc décrit par le potentiel vecteur

$$\mathbf{a} = \frac{2p\phi_0}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \sum_k \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (2.33)$$

Ce potentiel vecteur a pour effet de multiplier la fonction d'onde du j ème électron par un facteur

$$e^{-i2p\sum_k \theta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)} = \prod_k \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \quad (2.34)$$

L'équivalence topologique entre ce terme et le vortex (2.31) est alors apparente. Néanmoins, alors que le terme (2.34) n'adjoint qu'une phase à la fonction d'onde, les facteurs de Jastrow (2.31) représentent de plus l'annulation du module de la fonction d'onde lorsque $z_j - z_k \rightarrow 0$.

Forts de ces observations, nous pouvons construire la fonction d'onde des N FCs comme suit.

1. On considère ν^* NLs remplis, et on note Ψ_{ν^*} la fonction d'onde à N corps correspondante. Le nombre de quanta de flux associé vaut $N_{B^*} = N/\nu^*$. Ces NLs virtuels seront appelés niveaux Λ (NAs) par la suite, pour les distinguer des NLs réels.
2. On attache $2p$ quanta de flux à chaque particule,

$$\Psi_{\nu^*}(z_1, \dots, z_N) \mapsto \Psi_{\nu^*} \times \prod_{j,k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \quad (2.35)$$

Cette opération ajoute $N \times 2p$ quanta de flux.

3. On « étale » les quanta de flux attachés aux électrons², qui créent des vortex (2.31) dans la fonction d'onde, et l'on suppose le processus adiabatique. Cette étape permet de répartir uniformément le flux magnétique introduit à l'étape précédente. La fonction d'onde devient

$$\Psi_{\nu^*} \times \prod_{j,k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \mapsto \Psi_{\nu^*} \times \prod_{j,k} (z_j - z_k)^{2p} \quad (2.36)$$

et le champ magnétique $B = B^* + 2pn\phi_0$.

4. Si l'on a initialement considéré plusieurs NLs remplis, la fonction d'onde finale contient des composantes non-analytiques et n'appartient donc pas au plus bas NL. On projette la fonction d'onde dans le plus bas NL à l'aide de l'opérateur $\mathcal{P}_{\text{PBNL}}$ déjà présenté dans la section 1.3.

La fonction d'onde des FCs qui peuplent ν^* NAs, et captent chacun $2p$ quanta de flux, est donnée par

$$\Psi_{\text{FCs}} = \mathcal{P}_{\text{PBNL}} \left[\Psi_{\nu^*} \times \prod_{j,k} (z_j - z_k)^{2p} \right]. \quad (2.37)$$

Du décompte du nombre de quanta de flux $N_B = N/\nu^* \pm 2pN$, on peut déduire que cette fonction d'onde décrit un système à un facteur de remplissage

$$\nu = \frac{N}{N_B} = \frac{\nu^*}{2p\nu^* \pm 1}; \quad (2.38)$$

2. Un traitement rigoureux de cet étape a été proposé par Lopez et Fradkin [LF91]. Pour l'introduire on remarque que le potentiel vecteur (2.34) décrit une transformation de Chern-Simons, car il modifie les opérateurs de création selon $\psi(\mathbf{r}) = \exp(-i2p \int d\mathbf{r}' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')) \psi_{\text{CS}}(\mathbf{r})$, où ρ est l'opérateur densité. Lopez et Fradkin ont montré que la fonction d'onde des FCs s'obtient en opérant une transformation de Chern-Simons sur le hamiltonien cinétique, suivie d'un traitement de champ moyen de la densité. Dans cette théorie l'étalement du flux est induit par les fluctuations de densité autour de la valeur moyenne (voir la référence [MS03] pour une explication pédagogique).

le signe - dans le dénominateur traduit la possibilité d'introduire des quanta de flux opposés au champ magnétique effectif B^* ; notons que toutes les fractions (2.38) ont un dénominateur impair. L'ensemble des valeurs du facteur de remplissage (2.38) correspondant à $\nu^* \in \mathbb{N}$ est appelée séquence de Jain. Inversement, on note qu'on a

$$\nu^* = \frac{\nu}{2p\nu \mp 1}. \quad (2.39)$$

Les FCs sont soumis à un champ magnétique résiduel $B^* = \pm N/\nu^* = B \mp 2pn\phi_0$, et aux NAs sont associés des gaps cyclotrons effectifs $\hbar\omega_c^* = \hbar \frac{eB^*}{m}$. Moyennant l'introduction de ces quantités, les FCs remplissent un nombre entier de NAs, et l'EHQF d'électrons est assimilé à l'EHQE de FCs. Cependant, le gap $\hbar\omega_c^*$ n'est pas proportionnel à \sqrt{B} comme il conviendrait pour l'EHQE, où dominent les interactions, mais à B . Cette erreur est la conséquence d'une image naïve de la théorie de Chern-Simons. L'estimation des gaps énergétiques des fermions composites nécessite un travail plus approfondi qui est présenté dans la référence [MS03].

La relation (2.39) montre que pour $\nu = 1/2$ et $p = 1$, $\nu^* \rightarrow \infty$, et donc B^* s'annule. Le demi-remplissage d'un NL est donc un cas particulier, car le champ magnétique effectif ressenti par les FCs vaut zéro. Deux scénarios sont alors vraisemblables, soit les FCs forment un liquide de Fermi, soit les interactions résiduelles entre FCs favorisent l'appariement de ceux-ci dans un état analogue à celui d'un supraconducteur. Plus généralement, l'annulation du champ magnétique effectif est également possible à tous les facteurs de remplissage qui sont des inverses d'entiers pairs $\nu = 1/(2p)$. Les FCs portent alors $2p$ quanta de flux chacun.

2.3.2 Fermions composites indépendants : Liquide de Fermi de fermions composites

Aux facteurs de remplissage inverses d'entiers pairs, $\nu = 1/(2p)$, l'annulation du champ magnétique effectif fait du vecteur d'onde k un bon nombre quantique pour les FCs. On peut alors leur associer une surface de Fermi dont le vecteur d'onde de Fermi est donné par (n est la densité de FCs, qui est égale à la densité d'électrons)

$$n = \int_0^{k_F} \frac{d^2k}{2\pi^2} = \frac{k_F^2/2}{2\pi} \implies k_F = \sqrt{4\pi n}, \quad (2.40)$$

soit $\sqrt{2}$ fois le vecteur d'onde de Fermi d'un liquide de Fermi standard, à la même densité. Ce facteur multiplicatif provient de la dégénérescence de spin, qui est levée pour les FCs. Historiquement l'intérêt de cet état apparut après l'observation par Jiang et ses collaborateurs d'une anomalie dans la conductance à $\nu = 1/2$, en 1989 [JSI⁺89]. À ce remplissage, la résistance longitudinale présente un creux, qui ne tend pas vers zéro lorsque la température décroît, et qui ne coïncide pas avec un plateau dans la résistance de Hall. Ce fait suggère un état de type métallique, dont l'existence a été confirmée par des mesures expérimentales du vecteur d'onde de Fermi [WPR⁺90, KSP⁺93, GSJ94], celui-ci coïncide avec (2.40).

Dans la fonction d'onde des FCs (2.37), le terme Ψ_{ν^*} décrit ν^* NAs remplis de FCs. La fonction d'onde de liquide de Fermi de fermions composites (LFFC) est obtenue en remplaçant ce terme par la fonction d'onde d'un liquide de Fermi, c'est-à-dire un déterminant de Slater d'ondes planes

$$\Psi_{\text{Fermi}}(z_1, \dots, z_N) = \det \left(e^{-i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_k} \right) = \det \left(e^{-\frac{ik_j \bar{z}_k}{2}} \right) \times \det \left(e^{-\frac{i\bar{k}_j z_k}{2}} \right) \quad (2.41)$$

où l'on a utilisé $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (k\bar{z} + \bar{k}z)/2$, avec $k = k_x + ik_y$. La fonction d'onde du LFFC s'écrit donc

$$\Psi_{\text{LFFC}}(z_1, \dots, z_N) = \mathcal{P}_{\text{PBNL}} \left[\det \left(e^{-\frac{ik_j \bar{z}_k}{2}} \right) \times \det \left(e^{-\frac{i\bar{k}_j z_k}{2}} \right) \times \prod_{j,k} (z_j - z_k)^{2p} \right]. \quad (2.42)$$

D'après l'expression du projecteur dans le plus bas NL $\mathcal{P}_{\text{PBNL}} : \bar{z} \mapsto 2\partial_z$, on obtient

$$\Psi_{\text{LFFC}}(z_1, \dots, z_N) = \det\left(e^{-ik_j \partial_{z_k}}\right) \times \det\left(e^{-\frac{i\bar{k}_j z_k}{2}}\right) \times \prod_{j,k} (z_j - z_k)^{2p}. \quad (2.43)$$

Halperin, Lee et Read étudièrent cet état et montrèrent que la compressibilité correspondante s'écrit [HLR93]

$$\kappa(q) \underset{q \ll k_F}{\approx} \frac{1}{v(q) + \frac{2\pi}{m_0} \left(1 + \frac{(2p)^2}{6}\right)}, \quad (2.44)$$

où m_0 fait référence à la masse *nue* de l'électron. Dans le cas de l'interaction de Coulomb $v(q) = 2\pi/q$ la compressibilité s'annule donc linéairement. À l'inverse, dans les états de Hall quantiques, la compressibilité est nulle à tous les vecteurs d'ondes, c'est même la condition nécessaire à l'apparition de l'effet Hall quantique, qui a été évoquée dans la section 1.2.3. Ainsi le LFFC ne présente pas l'effet Hall quantique parce que c'est un état compressible ; ceci est dû à la présence d'excitations non gappées aux petits vecteurs d'onde.

2.3.3 Appariement triplet des fermions composites : état pfaffien de Moore et Read

Les interactions résiduelles entre FCs ne sont pas simples à déterminer. Pour les électrons, une interaction effective attractive médiée par les ions du réseau sous-jacent peut induire l'appariement dans un état de type BCS. Pour les FCs, un appariement semblable est possible ; il n'est pas dû au réseau ionique mais à la forme particulière de l'interaction de Coulomb projetée dans un NL donné. L'état apparié – dit *état pfaffien* ou tout simplement *pfaffien* – fut introduit par G. Moore et N. Read en 1991 [MR91] dans un article fondateur qui établit un pont entre les fonctions d'essai de l'EHQF et les corrélateurs en théorie des champs conformes. Cependant je m'appuie sur une monographie de M. Greiter [Gre11], basée sur une approche différente de celle de Moore et Read, pour la présentation qui suit. Celui-ci avait également introduit l'état pfaffien avec Wen et Wilczek la même année [GWW91], indépendamment de Moore et Read, mais il n'avait pas remarqué la statistique non-abélienne des quasi-particules correspondantes.



N. Read.

Pour établir l'analogie de l'état BCS pour les FCs, commençons par déterminer l'expression de la fonction d'onde BCS à N corps dans l'espace réel. Le vecteur d'état d'une paire de Cooper s'écrit [AS10]

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \propto \prod_{\mathbf{k}} \left(1 + \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \quad (2.45)$$

où $|0\rangle$ désigne l'état vide d'électrons. L'utilisation de l'identité $(1 + \alpha c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle = \exp(\alpha c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle$, et l'introduction de l'opérateur de création de paire

$$d^\dagger = \sum_{\mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (2.46)$$

permet de réécrire l'état BCS comme un état cohérent

$$|\text{BCS}\rangle = e^{d^\dagger} |0\rangle. \quad (2.47)$$

Celui-ci n'est pas état propre de l'opérateur nombre de paires $\hat{N}_p = d^\dagger d$, mais de l'opérateur phase $\hat{\theta}$ défini par $d = e^{-i\hat{\theta}} \sqrt{\hat{N}_p}$. De par le fait que la phase et le nombre de paires sont canoniquement conjugués,

$[\hat{N}_p, \hat{\theta}] = i$, on peut projeter l'état BCS sur l'espace des états à N_p paires

$$\begin{aligned} |N_p\rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta N_p} |\text{BCS}\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta d^\dagger d} e^{d^\dagger} |0\rangle \\ &= \frac{(d^\dagger)^{N_p}}{N_p!} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.48)$$

En transcrivant l'opérateur de création de paire dans l'espace réel

$$c_{\mathbf{k}\sigma} = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_\sigma(\mathbf{r}) \implies d^\dagger = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \underbrace{\sum_{\mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}_{\varphi_p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_2) \quad (2.49)$$

on introduit la fonction d'onde de paire φ_p . La généralisation à N_p paires

$$|N_p\rangle = \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \varphi_p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \dots \varphi_p(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N) \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_2) \dots \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_N) |0\rangle \quad (2.50)$$

donne la fonction d'onde suivante

$$\Psi_{N_p}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N | N_p \rangle = \text{Pf}[\varphi_p(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)] \quad (2.51)$$

où le pfaffien Pf d'une matrice $2N \times 2N$ antisymétrique M est défini par

$$\text{Pf}(M) = \frac{1}{2^N N!} \sum_{p \in \sigma_{2N}} \varepsilon(p) \prod_{i=1}^N M_{p(2i-1), p(2i)} \quad , \quad (2.52)$$

où σ_{2N} désigne le groupe des permutations à $2N$ éléments, et $\varepsilon(p)$ est la signature de la permutation p . Concrètement, le pfaffien assure l'antisymétrie de la fonction d'onde lors de l'échange de particules appartenant à des paires différentes, tout en laissant la symétrie de la fonction φ_p inchangée.

Dans le cas des FCs appariés, qui sont décrits par la fonction d'onde

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \text{Pf}[\varphi_p(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)] \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p} \quad , \quad (2.53)$$

plusieurs contraintes affectent la forme de la fonction de paire φ_p :

- on s'intéresse d'abord à l'appariement dans le secteur de spin triplet. Ainsi, la partie spinorielle de la fonction d'onde de paire est symétrique, la partie spatiale φ_p doit donc être antisymétrique pour assurer la statistique fermionique.
- la contrainte d'analyticité du plus bas NL interdit la présence de positions conjuguées, *i.e.* $\varphi_p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ est une fonction de $z_1 - z_2$ uniquement.
- dans la mesure où l'exposant maximal des positions complexes dans la fonction d'onde est limité par le nombre de quanta de flux, le terme d'appariement φ_p ne doit pas augmenter ces exposants car autrement le facteur de remplissage serait changé.

Les solutions ont la forme

$$\varphi_p(z_1 - z_2) = \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right)^{2n+1} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.54)$$

avec la contrainte $n < \nu^{-1}$ pour assurer la normalisabilité de la fonction d'onde (2.51). À demi-remplissage, seul le choix $n = 0$ est acceptable. Dans les autres cas ($\nu^{-1} = 2p$), on utilisera également l'expression de la

fonction d'onde de paire de CFs (2.54) correspondant à $n = 1$, celui-ci correspond à l'appariement en onde p , car la symétrie de la fonction de paire est identique à celle des orbitales p de l'atome d'hydrogène.

La fonction d'onde de l'état pfaffien de Moore et Read s'écrit finalement

$$\Psi_{\text{Pf}}(z_1, \dots, z_N) = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_j - z_k} \right) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p}, \quad (2.55)$$

et décrit un état à remplissage $\nu = 1/(2p) = 1/2, 1/4, 1/6, \dots$ dans lequel les électrons sont appariés.

Il est instructif de développer le pfaffien

$$\text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} \dots \frac{1}{z_{N-1} - z_N} + \text{permutations}, \quad (2.56)$$

soit pour la fonction d'onde (2.55)

$$\Psi_{\text{Pf}} = \underbrace{(z_1 - z_2)^{2p-1}}_{\text{1ère paire}} (z_1 - z_3)^{2p} \dots (z_1 - z_N)^{2p} (z_2 - z_3)^{2p} \dots (z_2 - z_N)^{2p} \underbrace{(z_3 - z_4)^{2p-1}}_{\text{2ème paire}} (z_3 - z_5)^{2p} \dots + \text{permutations}. \quad (2.57)$$

Les exposants dans les fonctions d'essais traduisent l'intensité des anti-corrélations entre électrons. On voit que le pfaffien, qui réduit ces exposants, a pour effet de rapprocher les électrons deux à deux. Dans le premier terme du membre de droite de l'équation (2.57), le premier électron est apparié au second, le troisième au quatrième, etc.

Le facteur de Jastrow étant pair, le pfaffien doit nécessairement être une fonction impaire afin que (2.55) soit fermionique. Le pfaffien affecte les corrélations électroniques mais ne modifie pas le facteur de remplissage à la limite thermodynamique. L'adjonction du pfaffien au facteur de Jastrow produit donc bien une fonction d'onde fermionique à $\nu = 1/(2p)$.

Interaction modèle Le comportement de la fonction d'onde (2.55) ne peut être spécifié uniquement par son comportement lorsque deux particules sont approchées, comme c'était le cas pour les fonctions d'essais présentées précédemment. En effet lorsque la distance entre deux particules α et β tend vers 0, $\delta_z = z_\alpha - z_\beta \rightarrow 0$, le terme dominant de fonction de Moore-Read (2.55) s'annule comme δ_z^{2p}

$$\Psi_{\text{Pf}} \underset{\delta_z \rightarrow 0}{\propto} \delta_z^{2p}. \quad (2.58)$$

Ce comportement est incompatible avec une fonction d'onde fermionique. Par contre, les propriétés de la fonction de Moore-Read lorsque *trois* particules sont rapprochées la spécifie complètement. Quelque soit le choix des trois particules α , β , et γ , le terme dominant lorsque $(z_\alpha - z_\beta) \rightarrow (z_\alpha - z_\gamma) \rightarrow \delta_z \rightarrow 0$ est donné par

$$\Psi_{\text{Pf}} \underset{z_\alpha \rightarrow z_\beta \rightarrow z_\gamma}{\propto} \delta_z^{3 \times 2p-1}. \quad (2.59)$$

La fonction d'onde de l'état pfaffien s'annule donc avec l'exposant $(6p-1)$ lorsque trois particules sont approchées. Cette remarque sert de point de départ à la construction de l'interaction modèle qui a l'état pfaffien pour unique état fondamental. Celle-ci est une interaction de « paire dure », à trois corps, définie par [GWW91]

$$V(r) = \sum_{i,j < k}^N \Delta_i^{2p-1} [\delta^{(2)}(z_i - z_j) \delta^{(2)}(z_i - z_k)] \quad (2.60)$$

où $\Delta_i = \nabla_i^2$ désigne le d'alembertien qui agit sur la i^{e} position.

L'état pfaffien a un recouvrement important avec l'état fondamental de l'interaction de Coulomb, à demi-remplissage du second plus bas NL. De plus, R. Morf a montré [Mor98] que ce recouvrement peut être approché de l'unité en augmentant le pseudopotentiel V_1 d'environ 10%. Les pseudopotentiels à deux corps optimaux pour l'état pfaffien sont donc ceux de l'interaction de Coulomb projetée dans le second plus bas NL, avec une répulsion à courte portée légèrement renforcée par rapport à l'interaction de longue portée, et notamment le pseudopotentiel V_3 . L'état pfaffien peut donc aisément être stabilisé dans les systèmes réels, parce que les pseudopotentiels diffèrent toujours légèrement de l'interaction de Coulomb à cause du mélange des NLs, de la largeur finie du puits, des impuretés, et autres.

Notons qu'en pratique, on génère l'état pfaffien numériquement en utilisant sa décomposition sur les polynômes de Jack [BH08, BR09, TERB11a, TERB11b], bien moins gourmande en mémoire que la diagonalisation de l'interaction modèle (2.60).

Quasiparticules Les quasi-particules de l'état Pfaffien suscitent un intérêt énorme dans la communauté scientifique, parce qu'elles sont non abéliennes. Cela signifie que les permutations des quasiparticules ne changent pas seulement la phase de la fonction d'onde, mais en produisent une nouvelle qui ne restitue pas la première lorsque l'on applique la permutation inverse. Ceci peut se voir en construisant explicitement la fonction d'onde à quatre quasi-trous, puis en les permutant [Gre11]. Ce faisant on voit que la fonction d'onde après permutation ne peut pas s'écrire comme le produit de l'état initial par un facteur de phase. Ces excitations sont en réalité des fermions de Majorana ; le lecteur intéressé se réfère à la revue de C. Nayak et collaborateurs pour plus d'informations au sujet des excitations non abéliennes dans l'EHQF [NSS⁺08].

Shift La puissance maximale d'une position qui apparaît dans l'état pfaffien est donnée par $2p(N-1)-1$, où le premier terme est simplement dû au facteur de Jastrow, tandis que le second (-1) est dû au pfaffien qui compense un terme du facteur de Jastrow. Comme le nombre de quanta de flux est égal à cet exposant maximal, on a

$$N_B = \underbrace{2p}_{v_{\text{Pf}}^{-1}} \underbrace{N-2p-1}_{\delta_{\text{Pf}}} . \quad (2.61)$$

Le shift du pfaffien est donc $\delta_{\text{Pf}} = -2p - 1$.

2.3.4 État apparié singulet de Haldane et Rezayi

L'état pfaffien de Moore-Read résulte de l'appariement des FCs dans le secteur de spin triplet. Avant eux Haldane et Rezayi ont considéré un état apparié dans le secteur singulet [HR88]. Pour l'écrire on reprend la fonction d'onde générale (2.53) de l'état de FCs appariés. De la même manière que pour l'état pfaffien, la contrainte d'analyticité du plus bas NL et la symétrie dans l'espace de spin impose la forme suivante pour la fonction de paire de CFs

$$\varphi_p(z_1 - z_2) = \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.62)$$

à laquelle on doit adjoindre le spin singulet $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_1$. Le choix $n = 0$ correspond simplement à une fonction d'onde de Laughlin bosonique complètement polarisée dans le plan, *i.e.* la fonction de Halperin (222). On opte pour le choix $n = 1$, qui correspond à l'appariement en onde d , car un choix autre interdit la normalisabilité de la fonction d'onde pour $p = 1$. La fonction d'onde s'écrit finalement [RH00]

$$\Psi_{\text{HR}} = \text{Pf} \left[\frac{|\uparrow\rangle_j |\downarrow\rangle_k - |\uparrow\rangle_k |\downarrow\rangle_j}{(z_j - z_k)^2} \right] \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p} . \quad (2.63)$$

En étudiant les états de bord associés à l'état de Haldane-Rezayi par la théorie des champs conformes [RR96, MacR96], on peut montrer que les fonctions de corrélation correspondantes ont un comportement pathologique, elles divergent selon une loi de puissance. Cette divergence montre que cette fonction modèle est compressible et ne sous-tend donc pas l'effet Hall quantique fractionnaire.

Pour l'interaction de Coulomb pure, cet état a une énergie plus importante que l'état de Moore-Read, au moins dans les deux plus bas NLs (voir tableau 2.3). Notons que, bien que l'état de Haldane-Rezayi soit défavorisé par l'énergie Zeeman, celui-ci est favorisé par une interaction amoindrie entre spins opposés. On s'attend donc à ce que cet état soit pertinent dans une bicouche, car dans celle-ci les électrons de couches différentes interagissent moins et l'énergie Zeeman est absente.

Interaction modèle L'état de Haldane-Rezayi est l'unique état fondamental d'une interaction modèle de « cœur creux » dont les pseudopotentiels sont donnés par

$$V_m^{\sigma\sigma'} = \Delta(0, \underbrace{1, 1, 1, 0, \dots}_{m < 2p}) \quad \Delta \in \mathbb{R}_+^*. \quad (2.64)$$

L'appariement singulet est permis par l'absence de coût énergétique $V_0^{\uparrow\downarrow}$ pour les spins opposés de moment cinétique relatif nul.

Shift Le comptage des exposants des positions dans la fonction de Haldane-Rezayi s'effectue de la même manière que pour l'état de Moore-Read, on trouve $\delta_{\text{HR}} = -2p - 2$.

Fonction d'onde	Fonction d'onde de paires φ_p	Onde	Spin
Halperin $(2n+1, 2n+1, 2n-1)$	$\frac{ \uparrow\rangle_j \downarrow\rangle_k + \uparrow\rangle_k \downarrow\rangle_j}{z_j - z_k}$	p	Triplet, $S_z = 0$
Pfaffien	$\frac{ \uparrow\rangle_j \uparrow\rangle_k}{z_j - z_k}$	p	Triplet, $S_z = 1$
Haldane-Rezayi	$\frac{ \uparrow\rangle_j \downarrow\rangle_k - \uparrow\rangle_k \downarrow\rangle_j}{(z_j - z_k)^2}$	d	Singulet

TABLE 2.1 Les différentes fonctions d'ondes de fermions composites (FCs) appariés. J'ai ajouté l'expression issue de [GFN97] de la fonction d'onde de Halperin $(2n+1, 2n+1, 2n-1)$, qui montre que celle-ci peut-être interprétée comme un états de FCs appariés en onde p , dans le secteur triplet $S_z = 0$. La fonction d'onde à N corps est construite à partir de la fonction de paire φ_p suivant $\Psi = \text{Pf}(\varphi_p(z_j - z_k)) \prod_{i < j} (z_j - z_k)^{2n}$.

2.4 Cristaux de Wigner

En 1934, Wigner introduisit un état fictif ayant vocation à donner une borne supérieure pour l'énergie de corrélation d'un gaz d'électrons, dans le modèle du Jellium [Wig34]³. Dans cet état les électrons sont localisés aux nœuds d'un réseau, et forment donc un cristal, ils minimisent ainsi leur énergie potentielle au dépens de l'énergie cinétique. Initialement outil théorique, le cristal de Wigner est devenu réalité dans un système bidimensionnel d'électrons déposé à la surface de l'Hélium superfluide en 1979 [GA79]. Dans cette expérience, la température est toujours supérieure à la température de de Broglie, le régime quantique n'est donc pas atteint et on parle de cristal de Wigner classique.



E. Wigner.

Pour stabiliser un cristal de Wigner, il faut augmenter l'énergie d'interaction par rapport à l'énergie cinétique. Cela peut être fait en abaissant la densité. Cette voie n'a été couronnée de succès que très récemment grâce à Huang qui a rapporté l'observation d'un cristal de Wigner dans le régime quantique (en l'absence de champ magnétique) en 2013 [HPW13]. Un autre moyen de favoriser l'énergie d'interaction est d'appliquer un champ magnétique. Dans ce cas, à remplissage partiel l'énergie cinétique est complètement supprimée, et on s'attend à ce que les cristaux de Wigner soient pertinents pour la description de l'état fondamental du système. Avant la découverte de l'EHQF, le cristal de Wigner était l'état fondamental attendu pour un système bidimensionnel d'électrons (SBE) dans un NL partiellement rempli, quelque soit le facteur de remplissage [FPA79, YF79]. Cependant, le cristal de Wigner ne permet pas de rendre compte de l'EHQF observé à certains facteurs de remplissages, par exemple à $\nu = 1/3$, où l'état de Laughlin a une énergie plus basse et fournit une explication pour l'EHQF. Plus important encore, l'observation de l'EHQF implique un état fondamental incompressible, comme nous l'avons vu précédemment, alors que le cristal de Wigner est compressible grâce à ses phonons.

Le cristal de Wigner peut malgré tout être observé dans un SBE sous champ magnétique, mais seulement à des facteurs de remplissage faibles $\nu < 1/5$ [ADG⁺88] ou éventuellement entre les fractions « magiques » auxquelles l'EHQF est stabilisé. Dans ce dernier cas on parle de « réentrance » de la phase isolante.

2.4.1 Cristaux de Wigner sous champ magnétique

En deux dimensions, un cristal peut s'arranger selon un des cinq réseaux de Bravais correspondants. Le réseau bidimensionnel le plus général est le réseau monoclinique, il englobe les quatre autres réseaux représentés sur la figure 2.3.

Ici le réseau est formé par l'action de la répulsion coulombienne qui tend à l'espacement entre électrons, notamment à courte distance. On peut donc supposer que l'arrangement qui minimise l'énergie d'interaction est celui qui maximise la distance entre premiers voisins à densité donnée. Le réseau triangulaire, qui est le réseau le plus dense en deux dimensions, est donc favorisé. Néanmoins, on considérera également le réseau carré, dans lequel la plus grande distance entre premiers voisins peut être compensée par la distance plus faible entre seconds voisins. Le cristal de Wigner carré a une énergie plus basse que son alter-ego triangulaire pour les densités électroniques importantes, $\nu \simeq 1/2$ (voir figure 2.8). Les réseaux plus généraux que les réseaux triangulaires et carré ne sont pas pertinents dans la monocouche. En effet l'optimisation énergétique du cristal de Wigner vis-à-vis des paramètres du réseau monoclinique mène toujours soit à un réseau carré ou un réseau triangulaire. La situation est plus riche dans le cas de la bicouche ; pour cette

3. « If the electrons had no kinetic energy, they would settle in configurations which correspond to the absolute minima of the potential energy. These are closed-packed lattice configurations, with energies very near to that of the body-centered lattice. Here, every electron is very nearly surrounded with a spherical hole of radius r_s , and the potential energy is smaller than in the random configuration by the amount of $0.75e^2/r_s$. This would be the sum of the correlation energy and that due to the Fermi hole. Since the latter one is $0.458e^2/r_s$, the maximum amount of the correlation energy is $0.292e^2/r_s$. » E. Wigner, référence [Wig34], page 1010.

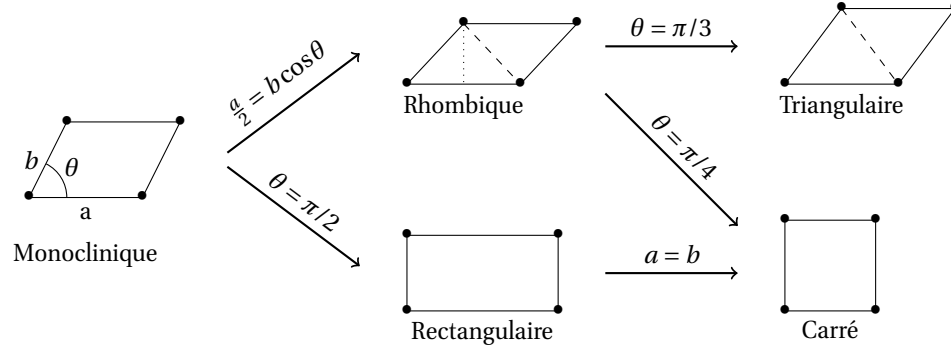


FIGURE 2.3 Réseaux de Bravais bidimensionnels.

raison je présente les réseaux rectangulaires et rhombiques qui s'avéreront être pertinents dans les cristaux bicouches alternés.

Réseau carré

La densité du réseau carré est reliée au facteur de remplissage par $\nu = n/n_B$, soit $\nu = 2\pi n$ en notant que la densité de flux magnétique vaut $n_B = B/(h/e) = 1/(2\pi l_B^2) = 1/(2\pi)$, où nous utilisons $l_B = 1$ désormais, *i.e.* toutes les longueurs sont mesurées en l_B . Le pas du réseau R_0 est donc donné par

$$n = \frac{1}{R_0^2} \iff R_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \quad (2.65)$$

et les vecteurs du réseau carré réciproque sont donnés par

$$\mathbf{q}_{ij}^{\text{carré}} = \sqrt{2\pi\nu} (i\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y). \quad (2.66)$$

Réseau rectangulaire

Extension naturelle du réseau carré, le réseau rectangulaire est décrit par le paramètre de dilatation α par rapport au réseau carré, qui correspond à $\alpha = 1$. Les vecteurs de base du réseau de Bravais sont

$$\mathbf{r}_{ij}^{\text{rec.}} = R_0 \left(\alpha i \mathbf{e}_x + \frac{j}{\alpha} \mathbf{e}_y \right). \quad (2.67)$$

et les vecteurs du réseau rectangulaire réciproque sont donnés par

$$\mathbf{q}_{ij}^{\text{rec.}} = \sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{i}{\alpha} \mathbf{e}_x + \alpha j \mathbf{e}_y \right). \quad (2.68)$$

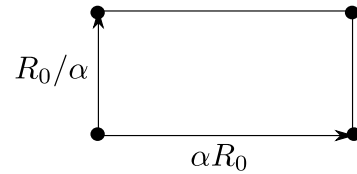


FIGURE 2.4 Maille élémentaire du réseau rectangulaire.

Réseau triangulaire

Soient

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = R_0 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{a}_2 = R_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_y \right) \end{cases} \quad (2.69)$$

les vecteurs de base du réseau triangulaire. Le pas du réseau R_0 est relié à la densité par

$$n = \frac{1}{A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{R_0^2} \iff R_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{\sqrt{3}v}}. \quad (2.70)$$

Les vecteurs de base \mathbf{a}_i^* du réseau réciproque sont définis par $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = 2\pi\delta_{ij}$, soit

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi}{R_0} \left(\mathbf{e}_x - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_y \right) \\ \mathbf{a}_2^* = \frac{2\pi}{R_0} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (2.71)$$

Un vecteur du réseau triangulaire réciproque a donc pour expression

$$\mathbf{q}_{ij}^{\text{triang.}} = \sqrt{\sqrt{3}\pi v} \left[i \mathbf{e}_x + \left(\frac{2j}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_y \right]. \quad (2.72)$$

Réseau rhombique

Le dernier réseau particulier à deux dimension est le réseau rectangulaire centré ou « rhombique ». Ses vecteurs de bases sont donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \alpha R_0 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{a}_2 = R_0 \left(\frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\alpha} \mathbf{e}_y \right) \end{cases} \quad (2.73)$$

et les vecteurs du réseau réciproque sont donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi}{R_0} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{e}_x - \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_y \right) \\ \mathbf{a}_2^* = \frac{2\pi}{R_0} \times \alpha \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (2.74)$$

Dans le cas particulier $\alpha = \sqrt{\sqrt{3}} \simeq 1,31$, on trouve que les deux vecteurs de base ont des normes égales et le réseau rhombique est confondu avec le réseau triangulaire.

Fonction d'onde du cristal de Wigner

La fonction d'onde la plus localisée entièrement contenue dans un seul NL qu'on puisse écrire est celle d'un état cohérent par rapport à l'opérateur centre-guide $\hat{\mathbf{R}}$. Dans le plus bas NL elle est définie par

$$\Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | e^{\frac{R}{\sqrt{2}} b^\dagger} | 0, 0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\frac{i}{2}(yX - xY)} e^{-\frac{1}{4}(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}, \quad (2.75)$$

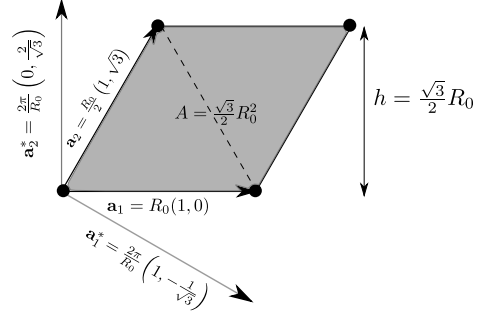


FIGURE 2.5 Maille élémentaire du réseau triangulaire et vecteurs de base du réseau réciproque.

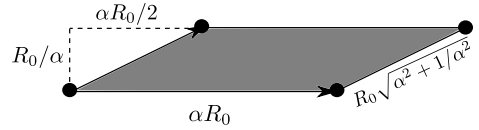


FIGURE 2.6 Maille élémentaire du réseau rectangulaire centré ou « rhombique ».

où $b^\dagger = (z/2 - 2\partial_z)/\sqrt{2}$ est l'opérateur d'incrément du moment cinétique L_z , et la densité de probabilité est une gaussienne centrée en \mathbf{R} d'écart-type 1 (en unités de l_B)

$$|\Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{R})^2}. \quad (2.76)$$

L'état à N -corps correspondant est un déterminant de Slater

$$\Psi_{\text{CW}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sqrt{\frac{1}{N!}} \det(\Psi_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i)), \quad (2.77)$$

où \mathbf{R}_j sont les sites du réseau cristallin. Si on néglige le recouvrement entre les différents états localisés⁴, on obtient la densité électronique suivante

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \int d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_j e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j)^2}, \quad (2.78)$$

dont la transformée de Fourier est

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{q}) \rangle &= \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_j \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j)^2} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

En complétant le carré

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j)^2 + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} + i\mathbf{q} - \mathbf{R}_j)^2 + \frac{q^2}{2} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j \quad (2.80)$$

on trouve

$$\langle \rho(\mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi e^{-\frac{q^2}{2}} \underbrace{\sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j}}_{=N \sum_j \delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{Q}_j)} \quad (2.81)$$

où \mathbf{Q}_j désigne les vecteurs du réseau réciproque. On a donc finalement

$$\langle \rho(\mathbf{q}) \rangle = N e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_j \delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{Q}_j), \quad (2.82)$$

et on en déduit

$$\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \rho(\mathbf{q}) \rangle e^{\frac{q^2}{4}} = N e^{-\frac{q^2}{4}} \sum_j \delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{Q}_j) \quad (2.83)$$

pour l'opérateur densité projeté dans le plus bas NL, défini par l'équation (2.8).

Notons dès à présent que l'approximation qui consiste à négliger le recouvrement entre états localisés voisins dans la fonction d'onde (2.75) du cristal de Wigner n'est plus valable à forte densité $\nu \approx 1/2$, et/ou lorsque l'on considère un cristal fortement anisotrope, car alors les sites premiers voisins peuvent être très proches. Les corrections à apporter dans ce cas de figure sont déterminées dans l'annexe D, et elles seront par la suite intégrées à tous les calculs d'énergie des cristaux de Wigner rectangulaire et rhombiques à $\nu = 1/2$.

4. Dans le cristal de Wigner la densité de probabilité des états localisés est une gaussienne d'écart-type 1, tandis que les premiers voisins sont distants de $\sqrt{2\pi/\nu} < \sqrt{4\pi} \approx 3.5$ pour le réseau carré et $\sqrt{4\pi/\sqrt{3}\nu} < \sqrt{8\pi/\sqrt{3}} \approx 3.8$ pour le réseau triangulaire, où la valeur maximale est obtenue pour $\nu = 1/2$. L'écart entre les états voisins est donc grand par rapport à leur étalement et on peut ainsi négliger leur recouvrement, sauf à $\nu = 1/2$, et notamment pour les cristaux anisotropes, ce cas particulier sera abondamment traité par la suite.

Cristal de Wigner corrélé

Dans la fonction d'onde qui vient d'être introduite, la dépendance en la position d'une particule n'est pas affectée par la position des autres particules. On peut écrire une fonction d'onde cristalline plus réaliste, dans laquelle les positions des électrons sont corrélées

$$\Psi_{\text{CWC}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = e^{-\frac{1}{4} \sum_{j,k} (z_j - R_j) B_{jk} (z_k - R_k)} \Psi_{\text{CW}}(z_1, \dots, z_N) \quad (2.84)$$

où R_j désigne les positions complexes des nœuds du réseau, et les coefficients B_{jk} sont des paramètres variationnels. On peut les déterminer analytiquement en faisant un développement du potentiel d'interaction autour des nœuds du réseau et en minimisant l'énergie obtenue. Lam et Girvin [LG84] ont effectué le développement au 4^e ordre en omettant le terme anharmonique d'ordre trois⁵; le détail de leurs calculs, absent de leur article, peut être trouvé dans la référence [CHM86]. Ils obtiennent pour l'énergie du cristal de Wigner triangulaire

$$E_{\text{CWC}} = -0,782 \, 133 \sqrt{\nu} + 0,2410 \nu^{\frac{3}{2}} + 0,16 \nu^{\frac{5}{2}} \quad (2.85)$$

tandis que la prise en compte du troisième ordre donne une correction $-0,073 \nu^{\frac{5}{2}}$ à cette énergie [EC90]. Ces expressions sont à comparer à l'énergie du cristal de Wigner triangulaire non corrélé [LWM84]

$$E_{\text{CW}} = -0,782 \, 133 \sqrt{\nu} + 0,2909 \nu^{\frac{3}{2}} + 0,010 \nu^{\frac{5}{2}}. \quad (2.86)$$

Comme on peut le voir sur la figure 2.7, les corrections apportées par les corrélations sont minimales. Pour cette raison, les corrélations du cristal de Wigner ne seront pas considérées dans ce manuscrit. Mentionnons tout de même le fait que la prise en compte des corrélations a permis à Lam et Girvin d'arbitrer la compétition entre le liquide de Laughlin à $\nu = 1/7$ et le cristal de Wigner en faveur de ce dernier, et ainsi d'expliquer l'absence d'EHQF à $\nu = 1/7$.

Notons aussi que, alors que les calculs d'énergie des cristaux de Wigner corrélés sont réalisables – bien que lourds – dans le cas de l'interaction coulombienne pure, ils requièrent un temps prohibitif pour les interactions effectives qui nous concernent. En effet le développement du réseau fait abondamment intervenir des dérivées multiples du potentiel. Celles-ci ont une expression simple dans le cas de l'interaction de Coulomb pure, mais dans le cas du puits large l'interaction (1.13) fait intervenir des intégrales numériques, et la dérivation de celles-ci est exagérément épineuse.

Calculs Hartree-Fock

On s'intéresse à des états de type onde de densité de charge, dont la forme est déterminée par la méthode de Hartree-Fock [Sén00]. À partir d'un état à un corps donné, la méthode de Hartree-Fock offre un traitement auto-cohérent des interactions. On ne l'a pas appliquée aux états de Hall quantique fractionnaires car ceux-ci sont des états fortement corrélés; en tant que tels leur fonction d'onde ne peut s'écrire comme un déterminant de Slater, or la méthode de Hartree-Fock n'est applicable qu'aux systèmes dont la fonction d'onde est un simple déterminant de Slater d'états à un corps.

En utilisant la méthode de Hartree-Fock, plusieurs auteurs ont montré [YL83, MZ83] que l'onde de densité de charge de plus basse énergie pour un SBE sous champ magnétique dans le plus bas NL est un état quasi-identique au cristal de Wigner (2.75).

L'approximation de Hartree-Fock consiste en la substitution [GV05]

$$c_a^\dagger c_b c_c^\dagger c_d \longrightarrow \underbrace{\langle c_a^\dagger c_b \rangle c_c^\dagger c_d}_{\text{Hartree}} - \underbrace{\langle c_a^\dagger c_d \rangle c_c^\dagger c_b}_{\text{Fock}} \quad (2.87)$$

5. « ... the anharmonic contributions to the energy turn out to be very small. This is reasonable since at least for small ν , the fluctuations ξ_i ; which are of the order of the magnetic length are much smaller than the nearest neighbor distance. »

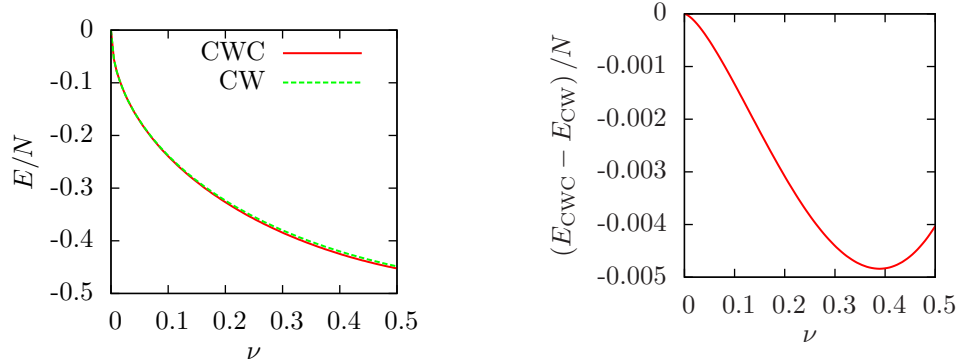


FIGURE 2.7 Énergie du cristal de Wigner triangulaire (CW), et du cristal de Wigner triangulaire corrélé (CWC), dont l'expression est tirée de la référence [EC90]. À $\nu = 1/2$ les valeurs sont $E_{CW} = -0,4484$ et $E_{CWC} = -0,4525$, soit une correction d'environ 4×10^{-3} (en unités de $e^2/(4\pi\epsilon l_B)$), ce qui correspond à un écart relatif de l'ordre de 1%.

dans le hamiltonien d'interaction, où les valeurs moyennes sont prises dans un état test choisi au préalable, le cristal de Wigner dans notre cas.

Dans cette approximation le hamiltonien (2.9) devient (voir la correction de l'exercice 9.3 de la référence [Yos02] pour le calcul complet)

$$V = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n^{\text{HF}}(\mathbf{q}) \langle \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \quad (2.88)$$

où

$$v_n^{\text{HF}}(\mathbf{q}) = \underbrace{v_n(\mathbf{q})(1 - \delta_{\mathbf{q},0})}_{\text{Pot. de Hartree}} - \underbrace{v_n^{\text{F}}(\mathbf{q})}_{\text{Pot. de Fock}} = v_n(\mathbf{q})(1 - \delta_{\mathbf{q},0}) - 2\pi \sum_{\mathbf{p} \neq 0} v_n(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}. \quad (2.89)$$

Le terme $(1 - \delta_{\mathbf{q},0})$ présent dans l'expression (2.89) du potentiel de Hartree-Fock tient compte de la neutralité de charge du système dans le cadre du modèle du Jellium.

Calcul du potentiel de Fock

Le potentiel de Fock défini par l'équation (2.89) vaut

$$v_n^{\text{F}}(\mathbf{q}) = 2\pi \sum_{\mathbf{p} \neq 0} v_n(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}} = 2\pi \sum_{\mathbf{p} \neq 0} v(p) \left[L_n \left(\frac{p^2}{2} \right) \right]^2 e^{-p^2/2} e^{i\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}. \quad (2.90)$$

Dans la limite d'un système infini

$$v_n^{\text{F}}(\mathbf{q}) = \int_0^\infty p \frac{dp}{2\pi} v(p) \left[L_n \left(\frac{p^2}{2} \right) \right]^2 e^{-\frac{p^2}{2}} J_0(pq), \quad (2.91)$$

où $J_0(x) = \int_0^{2\pi} d\theta e^{ix \sin(\theta)}$ désigne la première fonction de Bessel d'ordre 0.

On peut obtenir une expression explicite relativement simple pour l'interaction de Coulomb pure projetée dans les plus bas NL [GLMS04], notamment

$$v_0^{\text{F}}(\mathbf{q}) = 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{q^2}{4}} I_0 \left(\frac{q^2}{4} \right) \quad (2.92)$$

et

$$v_1^F(q) = 2\pi \times \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{q^2}{4}} \left[(q^4 - 2q^2 + 6) I_0\left(\frac{q^2}{4}\right) - q^4 I_1\left(\frac{q^2}{4}\right) \right], \quad (2.93)$$

où I_0 et I_1 sont les fonctions de Bessel modifiées. L'énergie s'écrit finalement, dans l'approximation de Hartree-Fock,

$$E_{\text{HF}} = \langle V \rangle = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n^{\text{HF}}(q) |\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle|^2 = \frac{N^2}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n^{\text{HF}}(q) e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_{\mathbf{Q}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}^{(2)} \quad (2.94)$$

soit une énergie par particule

$$\frac{E_{\text{HF}}}{N} = \frac{\nu}{4\pi} \sum_{\mathbf{Q} \in \text{RR}} v_n^{\text{HF}}(Q) e^{-\frac{Q^2}{2}}, \quad (2.95)$$

que l'on a obtenue en utilisant l'identité $\nu = n/n_B = 2\pi N/A$, et l'expression (2.78) de l'opérateur densité projeté. La somme sur \mathbf{Q} est à effectuer sur le réseau réciproque du cristal considéré, et dans le plus bas NL le potentiel de Hartree-Fock s'écrit

$$v_0^{\text{HF}}(Q) = \frac{2\pi}{q} e^{-\frac{q^2}{2}} (1 - \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}}) - 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{q^2}{4}} I_0\left(\frac{q^2}{4}\right). \quad (2.96)$$

La décroissance rapide de la densité avec q assure une convergence rapide de la somme, en pratique la sommation sur une centaine de vecteurs du réseau réciproque de plus faible norme est suffisante pour connaître l'énergie avec la précision machine.

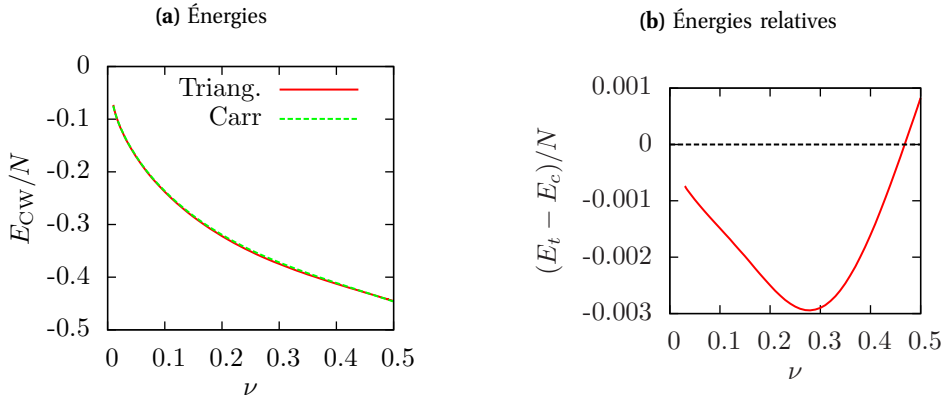


FIGURE 2.8 (a) Énergie des cristaux de Wigner triangulaire et carré en fonction du facteur de remplissage, pour l'interaction de Coulomb pure $v(q) = 2\pi/q$ dans le plus bas NL. (b) Différence d'énergie entre les deux types de réseaux. Le réseau carré est favorisé pour $\nu \approx 1/2$.

2.4.2 Cristaux de Wigner alternés dans une bicouche

Dans une bicouche les électrons se répartissent sur les deux couches. Lorsque la distance d est grande, l'interaction intra-couche domine l'interaction inter-couche plus faible. La configuration cristalline optimale est obtenue en minimisant l'énergie intra-couche, puis en plaçant les nœuds du cristal d'une couche dans les interstices de l'autre couche, on parle de cristal « alterné » (voir figure 2.9). À l'inverse, lorsque les couches sont très proches ($d \approx 0$) la répulsion inter-couches est aussi forte que la répulsion intra-couches [limite

SU(2)] et un cristal monocomposante est favorisé, dans lequel chaque électron est délocalisé sur les deux couches, dans l'état $(|\uparrow\rangle + e^{i\theta}|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ vis-à-vis du degré de liberté de couche.

Enfin, aux distances intermédiaires ($d \sim l_B$) la répulsion inter-couche est plus faible que la répulsion intra-couche, mais elle n'est pas négligeable. La configuration cristalline optimale offre un compromis entre les deux. Les réseaux rhombique, rectangulaire ou carré alternés peuvent alors être stabilisés, car leurs réseaux duaux sont identiques à leurs réseaux originaux. Les détails de cette compétition dépendent du facteur de remplissage et du NL considéré, et constituent l'objet d'étude du chapitre 3.

Réseaux alternés

Les réseaux carré et triangulaire alternés sont schématisés sur la figure 2.9, ils consistent en deux réseaux décalés d'un vecteur déplacement $\mathbf{a}_{\text{tr.}} = (0, 1)R_0/\sqrt{3}$ et $\mathbf{a}_{\text{car.}} = (1, 1)R_0/2$ respectivement, où R_0 est le pas du réseau. Les réseaux rectangulaire et rhombiques alternés sont construits de manière identiques, ils sont définis par des vecteurs déplacements $\mathbf{a}_{\text{rec.}} = (\alpha, 1/\alpha)R_0/2$ et $\mathbf{a}_{\text{rhom.}} = (1, 0)R_0$.

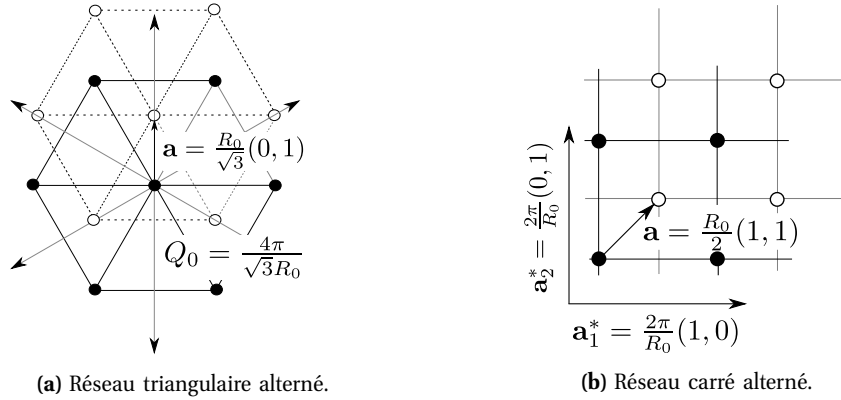


FIGURE 2.9 Réseaux alternés. Pour chacun d'entre eux sont indiqués les premiers vecteurs du réseau réciproque, ainsi que le vecteur déplacement \mathbf{a} . Les nœuds du réseau de la couche \downarrow sont indiqués par des points noirs, et ceux de la couche \uparrow par des points blancs.

Chacune des couches contient la moitié des électrons. Pour une densité n donnée, le pas du réseau alterné est donc multiplié par $\sqrt{2}$ par rapport au cristal monocomposante, et les vecteurs des réseaux réciproques sont donc divisés par le même facteur.

Les réseaux rectangulaire et rhombique alternés s'obtiennent de la même manière à partir de leur homologue monocouche, on verra plus loin dans le chapitre 3 qu'ils sont tous deux pertinents dans la bicouche car ils offrent parfois la configuration cristalline de plus basse énergie.

Approximation de Hartree-Fock pour la bicouche

Si l'on considère une bicouche, le hamiltonien d'interaction est agrémenté d'un indice de pseudospin σ et il s'écrit

$$V = \frac{1}{2A} \sum_{\sigma, \sigma'} \sum_{\mathbf{q}} v_n^{\sigma, \sigma'}(\mathbf{q}) [\bar{\rho}_{\sigma}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_{\sigma'}(\mathbf{q}) - \delta_{\mathbf{q}=0}] \quad (2.97)$$

où $v_n^A(\mathbf{q}) = v_n^{\uparrow\uparrow}(\mathbf{q})$ est le potentiel intra-couche et $v_n^E = v_n^{\uparrow\downarrow}(\mathbf{q})$ le potentiel inter-couches. Dans l'approximation de Hartree-Fock, le terme inter-couches devient

$$\bar{\rho}_{\uparrow}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_{\downarrow}(\mathbf{q}) \mapsto \langle \bar{\rho}_{\uparrow}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}_{\downarrow}(\mathbf{q}) - \langle \bar{\rho}_{\downarrow}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}_{\uparrow}(\mathbf{q}), \quad (2.98)$$

où l'on a introduit la notation

$$\bar{\rho}_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}) = \sum_k e^{-iq_y k} c_{k+\frac{q_x}{2},\sigma}^\dagger c_{k-\frac{q_x}{2},\sigma'}. \quad (2.99)$$

L'énergie est donc donnée par

$$E_{\text{HF}}^{\text{bicouche}} = E_{\text{HF}}^A + E_{\text{HF}}^E \quad (2.100)$$

où les énergies d'interaction intra- et intercomposantes ont pour expressions

$$E_{\text{HF}}^A = \frac{1}{2A} \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{q}} [v_n^{A,\text{HF}}(q)] |\langle \bar{\rho}_{\sigma}(\mathbf{q}) \rangle|^2 \quad (2.101)$$

et

$$E_{\text{HF}}^E = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} [v_n^E(q) (1 - \delta_{q,0}) \langle \bar{\rho}_{\uparrow}(-\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{\downarrow}(\mathbf{q}) \rangle - v_n^{E,F}(q) \langle \bar{\rho}_{\uparrow\downarrow}(-\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{q}) \rangle], \quad (2.102)$$

avec la définition habituelle des potentiels de Fock $v_n^{X,F}$ et Hartree-Fock $v_n^{X,\text{HF}}$,

$$v_n^{X,\text{HF}}(q) = v_n^X(q) (1 - \delta_{q,0}) - v_n^{X,F}(q) = v_n^X(q) (1 - \delta_{q,0}) - 2\pi \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} v_n^X(p) e^{i\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}, \quad (2.103)$$

où $X = A, E$ désigne l'interaction intra (A) ou inter (E)-couche.

Dans le cas d'une bicouche équipéeulée qui nous intéresse, une translation du vecteur déplacement \mathbf{a} superpose le réseau de la couche \downarrow au réseau de la couche \uparrow , les densités des deux couches sont donc reliées par

$$\rho_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \rho_{\uparrow}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\downarrow}(\mathbf{q}) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}} \rho_{\uparrow}(\mathbf{q}). \quad (2.104)$$

Ainsi l'énergie de HF se simplifie, en négligeant l'effet tunnel entre les couches ⁶,

$$E_{\text{HF}}^{\text{bic.}} = \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ [v_n^A(q) (1 - \delta_{\mathbf{q},0}) - v_n^{A,F}(q) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) v_n^E(q) (1 - \delta_{\mathbf{q},0})] |\langle \rho_{\uparrow}(\mathbf{q}) \rangle|^2 - v_n^{E,F}(q) |\langle \rho_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{q}) \rangle|^2 \right\}, \quad (2.107)$$

soit une énergie par particule

$$\frac{E_{\text{HF}}^{\text{bic.}}}{N} = \frac{v}{2\pi N^2} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ [v_n^A(q) (1 - \delta_{\mathbf{q},0}) - v_n^{A,F}(q) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) v_n^E(q) (1 - \delta_{\mathbf{q},0})] |\langle \bar{\rho}_{\uparrow}(\mathbf{q}) \rangle|^2 - v_n^{E,F}(q) |\langle \bar{\rho}_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{q}) \rangle|^2 \right\},$$

(2.108)

Notons que la densité moyenne a la même forme que dans le cas monocomposante, à ceci près que chaque couche ne contient que la moitié des électrons, et que les vecteurs du réseau réciproque sont modifiés en conséquence

$$\langle \bar{\rho}_{\sigma\sigma}(\mathbf{q}) \rangle = \frac{N}{2} e^{-\frac{q^2}{2}}. \quad (2.109)$$

6. **Terme tunnel** : dans le cas d'un recouvrement non nul entre états électroniques de deux couches voisines le terme tunnel est non nul, celui-ci prend la forme

$$H_t = -t \int d\mathbf{r} \left(\psi_{\uparrow}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) + \text{h.c.} \right) = -\frac{t}{A} \sum_{\mathbf{k}} \left(c_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} + \text{h.c.} \right) = -\frac{t}{A} [\bar{\rho}_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{0}) + \bar{\rho}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{0})]. \quad (2.105)$$

Dans l'approximation de Hartree-Fock sa contribution à l'énergie par particule vaut

$$\frac{E_t}{N} = -\frac{v}{\pi} t \langle \bar{\rho}_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{0}) \rangle. \quad (2.106)$$

Expérimentalement, ce terme peut être rendu très faible et il est généralement négligeable, notamment pour l'énergie des phases cristallines avec $\langle \rho_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{0}) \rangle \approx 0$.

2.4.3 Niveaux de Landau supérieurs : cristaux de bulles et de rubans

Dans les NLs supérieurs, les calculs Hartree-Fock montrent que des phases cristallines exotiques sont susceptibles d'apparaître [KFS96, MC96]. De la même manière que le creux dans le potentiel de Coulomb projeté dans le second NL peut induire l'appariement des FCs (voir section 2.3.1), il peut induire des cristaux dans lesquels les électrons se groupent pour occuper un site du réseau sous-jacent. Les états correspondants sont les cristaux de bulles et de rubans.

Cristal de bulles

Fogler et Koulakov [FKS96] ont introduit un état similaire au cristal de Wigner, dans lequel chaque nœud du réseau cristallin n'est pas occupé par un seul électron mais par une « bulle » qui contient M électrons. Dans les NLs d'indice élevé le nombre optimal \tilde{M} d'électrons par bulle dans le n^e NL est donné par la formule [FK97]

$$\tilde{M} = 3\nu_n n \quad (2.110)$$

où ν_n est le facteur de remplissage partiel du n^e NL. La formule (2.110) peut être trouvée à partir d'arguments d'échelle intuitifs qui éclairent les raisons de la formation du cristal de bulles dans les NLs supérieurs [GS03].

Les corrélations électroniques internes aux bulles sont celles d'un liquide sans interaction à $\nu = 1$, la fonction d'onde d'une bulle centrée en 0 dans le plus bas niveau de Landau s'écrit donc

$$\Psi_0^{(0)}(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j \leq M} (z_i - z_j). \quad (2.111)$$

L'état centré en \mathbf{R} est obtenu par application de l'opérateur déplacement

$$\mathcal{D}_{\mathbf{R}} = e^{(Rb^\dagger - \text{h.c.})/\sqrt{2}} \quad (2.112)$$

tandis que l'élévation dans le n^e NL se fait par applications successives de l'opérateur d'échelle a^\dagger . L'état de bulle centré en \mathbf{R} dans le n^e NL s'écrit donc

$$\Psi_{\mathbf{R}}^{(n)}(z_1, \dots, z_M) = \prod_{k=1}^M \frac{(a^\dagger)^n}{n!} e^{(Rb_k^\dagger - \text{h.c.})/\sqrt{2}} \Psi_0^{(0)}(z_1, \dots, z_N), \quad (2.113)$$

et l'état à N -corps correspondant

$$\Psi_{\text{bulles}}^{(n)}(z_1, \dots, z_N) = \sum_{p \in \sigma_N} \epsilon(p) \prod_i \underbrace{\Psi_{\mathbf{R}_i}^{(n)}(P(z_{p(i)}, \dots, z_{p(i+M)}))}_{\text{Bulle centrée en } \mathbf{R}_i}. \quad (2.114)$$

On en déduit la densité électronique [FK97]

$$\langle \rho(\mathbf{q}) \rangle = \frac{N}{M} L_{M-1}^1 \left(\frac{q^2}{2} \right) e^{-\frac{q^2}{4}} \sum_{\mathbf{Q} \in \text{RR}} \delta^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \quad (2.115)$$

où \mathbf{Q} sont les vecteurs du réseau réciproque du cristal, et où le recouvrement entre les électrons dans les bulles voisines a été négligé, ce qui nous permet de simplifier l'expression (2.114) en omettant l'antisymétrisation *via* la somme sur les permutations. L'énergie par particule d'un cristal de bulles composées de M électrons chacune vaut donc, dans l'approximation de Hartree-Fock,

$$\frac{E_{\text{bulles}}}{N} = \frac{1}{2AN} \sum_{\mathbf{q}} \nu_n^{\text{HF}}(q) |\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle|^2 = \frac{\nu}{4\pi M^2} \sum_{\mathbf{Q} \in \text{RR}} \nu_n^{\text{HF}}(Q) \left[L_{M-1}^1 \left(\frac{Q^2}{2} \right) \right]^2 e^{-\frac{Q^2}{2}}. \quad (2.116)$$

Cristal de rubans

Les calculs Hartree-Fock de Koulakov, Fogler et Shklovskii [KFS96], ainsi que ceux de Moessner et Chalker [MC96], suggèrent que proche du demi-remplissage et dans les NLs d'indice élevé, l'onde de densité de charge de plus basse énergie est unidirectionnelle. Ceci fut mis en évidence expérimentalement, par l'observation d'une anisotropie dans la résistance longitudinale [LCE⁺99].

Dans l'état correspondant, la densité projetée $\bar{\rho}$, ou « densité de centre-guide », varie périodiquement selon la direction x , entre zéro et une valeur constante. La densité projetée d'un tel ruban, de largeur w et centré en 0, est donnée par

$$\langle \bar{\rho}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \Theta\left(\frac{w}{2} - |x|\right). \quad (2.117)$$

La densité correspondante est obtenue par convolution de la densité de centre-guide avec la transformée de Fourier inverse du facteur de forme (2.7) du NL considéré, en effet en différenciant explicitement les transformées de Fourier par un « \sim », on a

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \mathcal{F}_n(q) \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{q}) \quad \implies \quad \rho(\mathbf{r}) = (\bar{\rho} * F_n)(\mathbf{r}) \quad (2.118)$$

où F_n est la transformée de Fourier inverse du facteur de forme \mathcal{F}_n . Dans les trois plus bas NLs celle-ci s'écrit

$$F_0(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{q^2}{4}} d\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} e^{-r^2}. \quad (2.119)$$

$$F_1(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} L_1\left(\frac{q^2}{2}\right) e^{-\frac{q^2}{4}} d\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} (2r^2 - 1) e^{-r^2}. \quad (2.120)$$

$$F_2(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} L_2\left(\frac{q^2}{2}\right) e^{-\frac{q^2}{4}} d\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} (2r^4 - 4r^2 + 1) e^{-r^2}. \quad (2.121)$$

La densité d'un ruban dans le plus bas NL est donc

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \Theta\left(\frac{w}{2} - |x - x'|\right) e^{-r'^2} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi)^2} \int_{-x-\frac{w}{2}}^{x-\frac{w}{2}} e^{-x'^2} dx' = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{erf}\left(x - \frac{w}{2}\right) + \operatorname{erf}\left(x + \frac{w}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.122)$$

où $\operatorname{erf}(x) = \int_{-x}^x \exp(-t^2) dt / \sqrt{\pi}$ est la fonction erreur.

L'état formé de plusieurs rubans disposés aux nœuds d'un réseau unidimensionnel de pas λ a pour densité projetée

$$\langle \bar{\rho}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_j \Theta\left(\frac{w}{2} - |x - j\lambda|\right). \quad (2.123)$$

Le rapport du pas du réseau λ et de la largeur w des rubans est relié à la densité moyenne $n_{\text{él.}}$. Soit L_x/L_y la longueur du système – supposé rectangulaire – suivant la direction x/y , on a

$$\begin{aligned} n_{\text{él.}} &= \frac{1}{L_x L_y} \int d\mathbf{r} \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int d\mathbf{r} \langle \bar{\rho}(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{L_y} \int_0^{L_x} dx \frac{1}{2\pi} \sum_j \Theta\left(\frac{w}{2} - |x - j\lambda|\right) \\ &= \frac{1}{2\pi L_y} w \lfloor L_x / \lambda \rfloor \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{w}{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . On a donc $w = \nu \lambda$.

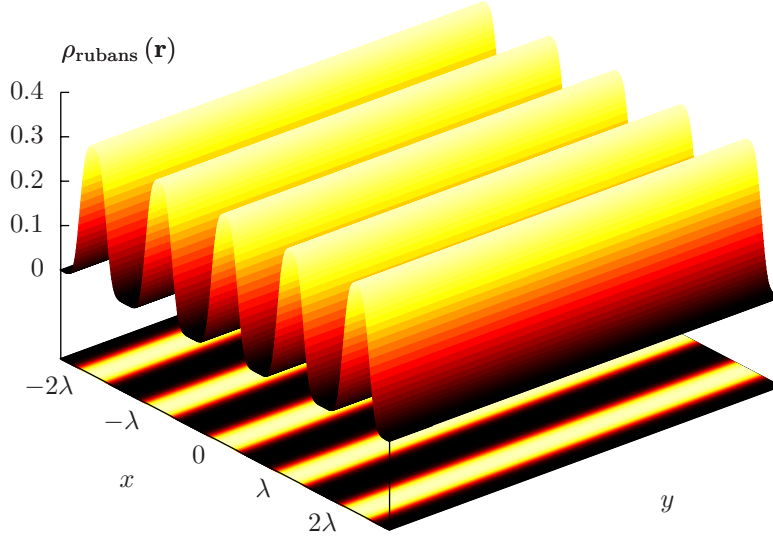


FIGURE 2.10 Densité du cristal de rubans dans le plus bas NL. Le pas du réseau λ est un paramètre variationnel, dont la largeur w des rubans est déduite par leur relation au facteur de remplissage : $w = \nu\lambda$. Dans le plus bas NL le pas optimal vaut $\lambda_{\text{opt}} \simeq 6,09 l_B$.

Connaissant le rapport entre le pas du réseau λ et la largeur des rubans w et l'expression (2.118) de la densité d'un ruban, on peut tracer la densité du cristal de rubans. Je la montre pour le plus bas NL sur la figure 2.10.

Pour déterminer l'énergie des rubans, on note que la transformée de Fourier de la densité d'un ruban de largeur w centré en 0 s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \Theta\left(\frac{w}{2} - |x|\right) \\ &= \frac{\delta_{q_y,0}}{2\pi} \int_{-w/2}^{w/2} dx e^{-iq_x x} \\ &= \frac{\delta_{q_y,0}}{2\pi} \frac{2 \sin(q_x w/2)}{q_x}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

On en déduit la transformée de Fourier de la densité de l'état de rubans

$$\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle = \frac{\delta_{q_y,0}}{2\pi} \frac{2 \sin(q_x w/2)}{q_x} \sum_j e^{iq_x j \lambda} = \delta_{q_y,0} \frac{2 \sin(q_x w/2)}{q_x} \sum_j \delta(q_x \lambda - 2\pi j), \quad (2.126)$$

la seconde égalité découlant de la formule sommatoire de Poisson.

En notant $q_x = 2\pi n/\lambda$, l'énergie par particule dans l'état de rubans s'exprime donc

$$\frac{E_{\text{rubans}}}{N} = \frac{1}{2AN} \sum_{\mathbf{q}} v_n^{\text{HF}}(q) |\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle|^2 = \frac{\nu}{4\pi} \sum_n v_n^{\text{HF}} \left(\frac{2\pi n}{\lambda} \right) \frac{\sin^2(\pi n \nu)}{(\pi n)^2}. \quad (2.127)$$

La valeur optimale du pas du réseau λ est déterminée par minimisation de l'énergie.

2.4.4 Rubans alternés

Dans une bicouche, les rubans peuvent s'organiser suivant deux réseaux qui s'évitent au maximum, comme dans le cas des cristaux de Wigner ; c'est la configuration des rubans alternés, dont la densité de centre-guide est schématisée sur la figure 2.11.

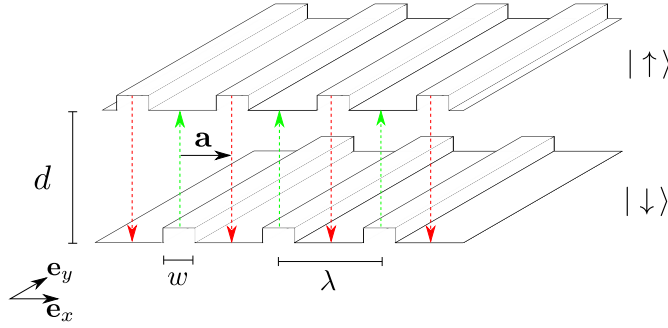


FIGURE 2.11 Densité de centre-guide du cristal de rubans alternés dans la bicouche. La largeur des rubans w et le pas du réseau λ sont reliés au facteur de remplissage selon $w = \lambda\nu/2$.

Le vecteur déplacement qui superpose le réseau de rubans \uparrow au réseau de rubans \downarrow , tout en réalisant l'alternance des rubans, est donné par

$$\mathbf{a} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}_x. \quad (2.128)$$

Étant donné que chaque couche ne contient que la moitié des électrons, la relation entre le pas du réseau λ et la largeur des rubans a devient $a = \frac{\nu}{2}\lambda$. La densité électronique dans la couche \uparrow est alors donnée par

$$\langle \bar{\rho}_{\uparrow}(\mathbf{q}) \rangle = \frac{\delta_{q_y,0}}{2\pi} \frac{2 \sin(q_x w/2)}{q_x} \sum_j e^{iq_x j \lambda} = \delta_{q_y,0} \frac{2 \sin(q_x w/2)}{q_x} \sum_j \delta(q_x \lambda - 2\pi j) \quad , \quad (2.129)$$

et, du fait que le cristal de rubans de la couche supérieure est translaté de $\lambda/2$ dans la direction x ,

$$\langle \bar{\rho}_{\downarrow}(\mathbf{q}) \rangle = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}} \langle \bar{\rho}_{\uparrow}(\mathbf{q}) \rangle = e^{iq_x \frac{\lambda}{2}} \langle \bar{\rho}_{\uparrow}(\mathbf{q}) \rangle. \quad (2.130)$$

L'énergie de Hartree-Fock est obtenue à partir de la formule (2.108), et on en déduit l'énergie par particule suivante

$$\frac{E_{\text{alt.}}^{\text{rubans}}}{N} = \frac{\nu}{8\pi} \sum_n \left\{ \left[v_n^{A,\text{HF}}(2\pi \frac{n}{\lambda}) + (-1)^n v_n^E(2\pi \frac{n}{\lambda}) (1 - \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}}) \right] \frac{\sin^2(\pi n \frac{\nu}{2})}{(\pi n)^2} \right\} \quad , \quad (2.131)$$

où $v_n^{A,\text{HF}}$ est le potentiel de Hartree-Fock intracouches, et v_n^E le potentiel inter-couches. Les termes $\langle \rho_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{q}) \rangle$ de l'équation (2.108) sont absents car les rubans appartenant à des couches différentes ont un recouvrement nul.

La valeur optimale du pas du réseau λ dépend de la distance d entre les couches. Pour chaque valeur de d elle est obtenue par minimisation de l'énergie comme pour le cristal de ruban monocomposante.

2.5 Résumé des phases en compétition

Dans ce chapitre j'ai introduit plusieurs états dont les propriétés sont résumées dans le tableau 2.2. Dans ce manuscrit je considère deux familles d'états d'EHQF, les états de Halperin et les états pfaffiens. Ceux-ci sont en compétition avec deux familles d'états compressibles, les LFFCs et les états de Haldane-Rezayi. Tous ces états ont vocation à décrire l'état fondamental du SBE à $\nu = 1/2, 1/4, \text{etc.}$ Enfin les états cristallins de Wigner sont également en compétition étroite avec tous ces états. Expérimentalement leur émergence est trahie par un comportement isolant **et** des résonances dans le spectre d'excitation micro-onde. Ils ont été observés à de nombreuses reprises dans des systèmes monocomposantes autour des facteurs de remplissage entiers [CLE⁺03] et dans la limite des faibles facteurs de remplissage [ELS⁺97]. Leur alter-ego des NLs supérieurs, les cristaux de bulles et de rubans, ont également été mis en évidence par le même procédé d'excitation micro-onde [LYE⁺02]. Des états isolants ont été observés dans des puits larges à $\nu = 1/2$, et je m'évertuerai par la suite à déterminer si ces états sont des cristaux de Wigner ou des états dans lesquels les électrons sont localisés individuellement par les impuretés.

État d'essai	Type	Multicomposante	Shift
Halperin (mmn)	EHQF	✓	$-m$
LFFC	Métal		$-2p$
Pfaffien	EHQF		$-2p - 1$
Haldane-Rezayi	Compressible	✓	$-2p - 2$
Cristaux	Isolants	(✓)	\times

TABLE 2.2 Caractéristiques des fonctions modèles de l'EHQF considérées dans ce manuscrit.

Le facteur de remplissage $\nu = 1/2$ apparaîtra de manière récurrente dans la suite du manuscrit. Son statut particulier tient au fait que de nombreuses phase sont observées à ce facteur de remplissage dans différents systèmes et NLs. Ici ainsi que dans la suite, on détermine la nature de l'état fondamental par comparaison des énergies des phases liquides (*via* des calculs Monte-Carlo) et des cristaux électronique (*via* calculs Hartree-Fock). Ces énergies sont données dans le tableau 2.3 pour les premiers NLs à demi-remplissage. Ces valeurs m'ont servi de point de référence pour estimer la validité de mes calculs et donnent les états fondamentaux dans limite d'un SBE infiniment fin.

État d'essai	Plus bas NL	Second NL
Halperin (331)	-0,4631(3)	-0,329(3)
Pfaffien	-0,4573(3)	-0,361(2)
LFEC	-0,46557(6)	-0,3492(5)
Haldane-Rezayi	-0.3147(3)	-0,303(3)
C. de Wigner	-0,4454	-0,3456
C. de bulles	-0,4357	-0,3535
C. de rubans	-0,4327	-0,3486

TABLE 2.3 Énergies par particule des états à demi-remplissage considérés dans ce manuscrit, dans les deux plus bas NLs et pour l'interaction de Coulomb pure. Les cristaux ont un réseau triangulaire, et l'énergie du cristal de bulles indiquée est celle de bulles à deux électrons. Dans chaque NL, l'état de plus basse énergie parmi ceux considérés est indiqué en gras (certaines énergies sont extraites de [BPDSI3] et [PMABJ98]).

Chapitre 3

Phases corrélées dans une bicouche

Le système bicouche présenté dans la section 1.1 permet d'enrichir le SBE d'un degré de liberté supplémentaire, dont l'existence induit des phénomènes physiques nouveaux. L'intérêt des systèmes bicouches est apparu pour la première fois lors de l'observation de l'EHQF à $\nu = 1/2$ par J. Eisenstein, en 1992 [EBP⁺92]. Comme il a été dit précédemment dans la section 2.3.2, dans un système monocomposante on s'attend à ce qu'à demi-remplissage du plus bas niveau de Landau (NL) l'état fondamental de l'interaction de Coulomb soit un liquide de Fermi de fermions composites, et l'EHQF est donc inattendu. L'état du SBE dans l'expérience d'Eisenstein est alors interprété comme un état de Halperin (331), dans lequel chaque couche contient la moitié des électrons. Dans cette situation l'EHQF est rendu possible par la présence du degré de liberté de couche. En plus de permettre l'EHQF à des facteurs de remplissages nouveaux, la bicouche est le siège de phénomènes physiques intéressants tels que la superfluidité excitonique et possède des excitations chargées originales qui sont des paires de mérons (le lecteur désireux d'approfondir ces points consultera avec profit les chapitres 2 et 5 de la référence [SP08]).

La bicouche présente donc un intérêt intrinsèque important. De plus, elle est utilisée pour modéliser le puits large qui sera l'objet du chapitre suivant. En effet dans le puits large la force de Coulomb repousse les électrons aux extrémités du potentiel de confinement, de telle sorte qu'une bicouche effective est formée.

Dans ce chapitre on veut déterminer le diagramme de phase de la bicouche idéale, dans laquelle chaque couche est infiniment fine. Pour ce faire on comparera les énergies des différentes phases corrélées présentées au chapitre précédent. Les deux paramètres pertinents sont le facteur de remplissage ν et la distance d entre les couches. Je déterminerai le diagramme de phase à facteur de remplissage donné en fonction de la distance, pour plusieurs facteurs de remplissage pertinents, et ce dans les deux plus bas NLs. Ces diagrammes ont l'avantage d'être directement comparables aux résultats expérimentaux, car en changeant simultanément le champ magnétique et la densité on peut faire varier la distance en unité de la longueur magnétique tout en maintenant le facteur de remplissage inchangé.

Dans une dernière partie je m'intéresserai à la bicouche à $\nu = 4/11$. L'EHQF a été observé dans un puits large à ce facteur de remplissage [PST⁺03] et a été interprété comme un EHQF de fermions composites [GLS04b, GLS04a, CJ04]. Cependant, la fonction d'onde de Halperin (532) est aussi un candidat plausible pour la description de l'EHQF à $\nu = 4/11$. Cet état est asymétrique, et pour le stabiliser il est nécessaire qu'il existe un biais qui rende le potentiel de confinement asymétrique. Dans cette dernière partie je modélise le puits large asymétrique par une bicouche « biaisée », et j'étudie la stabilité de l'état de Halperin (532) dans ce système.

Les résultats concernant la stabilité de l'état à $\nu = 4/11$ ont été publiés dans la référence [TRG13], et ceux obtenus par un calcul variationnel corrélées dans les deux plus bas NLs figurent dans un manuscrit actuellement en cours de rédaction.

3.1 Cristaux de Wigner dans la bicouche

Le système expérimental qui réalise la bicouche a été présenté dans la section 1.1, et il est schématisé sur la figure 3.1. Dans toute la suite j'adopte la représentation en termes de pseudospin, dans laquelle l'une des couches est associée au spin \uparrow et l'autre couche au spin \downarrow . Pour rappel, si l'on néglige l'épaisseur des couches, le potentiel d'interaction entre deux électrons distants de r dans le plan xy et de pseudospins σ et σ' s'écrit

$$V_{\sigma\sigma'}(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si } \sigma = \sigma' \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.1)$$

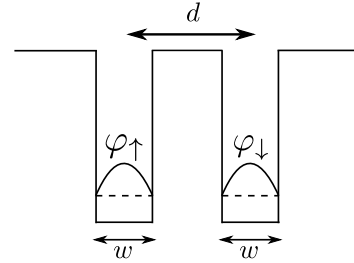


FIGURE 3.1 Bicouche et pseudospin

dans les unités « magnétiques », où l'unité de longueur est la longueur magnétique l_B et l'unité d'énergie est l'énergie coulombienne typique $E_C = e^2/(4\pi\epsilon l_B)$.

3.1.1 Hamiltonien en termes d'opérateurs densité de (pseudo)spin

Pour rappel, de la discussion sur la polarisation du spin physique dans le régime des effets Hall quantiques (section 1.3.3), il ressort que le trou d'échange abaisse l'énergie des états polarisés qui sont alors favorisés. La direction de polarisation est donnée par le champ magnétique qui brise la symétrie $SU(2)$ de spin, et on peut omettre le spin en première approximation.

Dans le cas de la bicouche, la situation est différente pour deux raisons. La première est une conséquence de l'effet tunnel entre les deux couches. En notant $S_z = (N_\uparrow - N_\downarrow)/2$ le désaccord de densité entre les couches, le terme tunnel dans le hamiltonien peut s'écrire $-tS_x$. Ainsi, de la même manière que l'effet Zeeman favorise la polarisation selon z dans le cas du spin, l'effet tunnel favorise la polarisation selon l'axe x dans le cas de la bicouche, même s'il est généralement fortement atténué. Deuxièmement, et plus important du point de vue des échelles d'énergie, l'interaction intercouches est plus faible que l'interaction intracouche; ceci favorise une occupation équitable des deux couches. Dans le langage du pseudospin, ceci se traduit par la brisure de symétrie $SU(2)$ du potentiel d'interaction qui n'a plus qu'une symétrie $U(1)$ de rotation dans le plan ($|+\rangle, |-\rangle$), et la forme de l'interaction favorise également la polarisation dans ce plan. Pour ces deux raisons, les deux couches sont peuplées et le degré de liberté de couche est pertinent contrairement au spin dans les cas généraux.

Afin de poursuivre l'analogie avec le spin on utilise les opérateurs densité projetés

$$\bar{\rho}_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}) = \mathcal{P}_{LLL} \left[\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\sigma'} \right] \mathcal{P}_{LLL} \quad (3.2)$$

dont l'expression dans la jauge de Landau a été donnée dans le chapitre 2

$$\bar{\rho}_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}) = \sum_{k_x} e^{-iq_y k_x} c_{k_x + \frac{q_x}{2}}^\dagger c_{k_x - \frac{q_x}{2}}. \quad (3.3)$$

À partir de ces opérateurs on définit les opérateurs densité totale

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{\sigma} \bar{\rho}_{\sigma\sigma}(\mathbf{q}) \quad (3.4)$$

et densité de spin

$$\bar{S}_i(\mathbf{q}) = \sum_{\sigma\sigma'} \frac{\tau_{\sigma,\sigma'}^{(i)}}{2} \bar{\rho}_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}) \quad (3.5)$$

où $\tau^{(i)} = \tau^x, \tau^y, \tau^z$ sont les matrices de Pauli.

Le potentiel d'interaction de la bicouche s'écrit

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_{\sigma\sigma'}(q) \bar{\rho}_{\sigma\sigma}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_{\sigma'\sigma'}(\mathbf{q}), \quad (3.6)$$

soit, en termes des opérateurs précédemment introduits,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_+(q) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}) + 2 \sum_{\mathbf{q}} V_-(q) \bar{S}_z(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) ; \quad (3.7)$$

où

$$V_{\pm}(q) = \frac{1}{2} [V_{\uparrow\uparrow}(q) \pm V_{\uparrow\downarrow}(q)] = \frac{\pi}{q} (1 \pm e^{-qd}) [F_n(q)]^2, \quad (3.8)$$

la seconde égalité étant obtenue à partir de la transformée de Fourier du potentiel d'interaction (3.1)

$$V_{\sigma\sigma'}(q) = \frac{2\pi}{q} [F_n(q)]^2 \times \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \sigma' \\ e^{-qd} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.9)$$

La brisure de symétrie SU(2) du potentiel d'interaction de la bicouche (3.6) est inhérente à la présence de termes \bar{S}_z ; les fluctuations de pseudospin hors du plan décrivent des désaccords de densité locaux entre les deux couches, qui coûtent une énergie déterminée par V_- qui est toujours positive. Ceci peut se comprendre physiquement si l'on considère la bicouche comme un condensateur. En effet, l'énergie du condensateur est nulle quand il n'est pas chargé, c'est-à-dire quand les charges sur les deux plaques du condensateur sont égales. Le « chargement » de la bicouche coûte une énergie donnée par la partie homogène du second terme du hamiltonien (3.7), soit

$$V_-(q=0) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\pi}{q} (1 - e^{-qd}) [F_n(q)]^2 = \pi d. \quad (3.10)$$

Or l'énergie d'un condensateur plan vaut, dans notre système d'unités

$$E_c = \frac{e^2/2C}{e^2/4\pi\epsilon l_B} = \frac{e^2 d/\epsilon A}{e^2/4\pi\epsilon l_B} = \frac{4\epsilon l_B}{A} \pi d, \quad (3.11)$$

et on a alors $E_c \propto V_-(q=0)$; une énergie de charge identique à celle d'un condensateur plan est donc bien associée au désaccord de densité de la bicouche.

L'état fondamental du potentiel d'interaction coulombien est donc naturellement polarisé dans le plan xy de l'espace de pseudospin. En revanche le potentiel d'interaction de la bicouche a la symétrie U(1). Cette symétrie U(1) est à son tour brisée en présence d'un terme tunnel faible que je discuterai brièvement dans le paragraphe suivant.

3.1.2 Terme tunnel

Dans les bicouches d'AlGaAs/GaAs, le terme tunnel est très faible car la barrière de potentiel qui sépare les deux couches est très haute par rapport à l'énergie de sous-bande de chacune des couches ; ainsi l'effet tunnel entre les couches est fortement réduit [EBP⁺92]. Je fais néanmoins un aparté afin de savoir quel est l'effet potentiel de ce terme qui sera omis par la suite.

En notant \uparrow et \downarrow les deux couches le terme tunnel s'écrit

$$H_t = -t \int \left(\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) + \text{h.c.} \right) d\mathbf{r} = -2t \sum_{\sigma\sigma'} \int \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \tau_{\sigma\sigma'}^{(x)} \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.12)$$

où l'amplitude tunnel est donnée par

$$t = \frac{\hbar^2}{2m} \int \varphi_{\uparrow}^*(z) \partial_z^2 \varphi_{\downarrow}(z) dz. \quad (3.13)$$

Notons qu'en pratique $0 \lesssim t \lesssim 0.1$ dans les expériences qui nous concernent [SP08], et cette valeur peut être réduite à souhait.

Au vu de l'expression (3.12), l'énergie tunnel d'un état donné peut se réécrire

$$E_t = -2t \langle S_x \rangle ; \quad (3.14)$$

le terme tunnel favorise donc l'alignement du pseudospin avec l'axe x . Dans toute la suite je considérerai que le terme tunnel, généralement faible, a pour seule conséquence de lever la dégénérescence due à l'invariance par rotation dans le plan xy de l'espace du pseudospin. La polarisation dans le plan se fait dans la direction x .

3.1.3 Diagramme de phase des cristaux électroniques dans le plus bas niveau de Landau

À deux dimensions, le cristal de Wigner de charges ponctuelles, c'est-à-dire « classique », ayant la plus basse énergie est un cristal triangulaire, indépendamment de la densité [BM77]. Ceci est lié au fait que le cristal triangulaire maximise la distance entre les premiers voisins et écrante donc la partie courte portée de l'interaction de manière optimale. Ceci n'est plus nécessairement vrai lorsque l'on prend en compte l'extension finie des fonctions d'ondes électroniques autour des noeuds du réseau. En l'absence de champ magnétique, l'état fondamental du SBE est un cristal de Wigner pour $r_s \geq 37 \pm 5$, où le rayon de Wigner-Seitz adimensionné r_s est le rayon de la sphère occupée par un électron en moyenne, exprimé en unité du rayon de Bohr a_B [TC89]. Cependant plusieurs arrangements cristallins différents ont des énergies très proches [TC89]. Ainsi, à densité élevée le cristal carré peut être favorisé ; c'est le cas sous champ magnétique à $\nu \simeq 1/2$.

Le diagramme de phase des cristaux électroniques dans la bicouche sous champ magnétique fait apparaître des réseaux inattendus. Les paramètres de la bicouche sont la distance et le facteur de remplissage. Le facteur de remplissage fixe la surface $S_0 = 1/n = 2\pi l_B^2/\nu$ en unités de la longueur magnétique. La surface étant fixée, la maille élémentaire du cristal de Wigner dans la bicouche est déterminée par trois paramètres, qui peuvent être choisis comme l'angle entre les deux vecteurs de base, le rapport de leurs normes, et l'angle

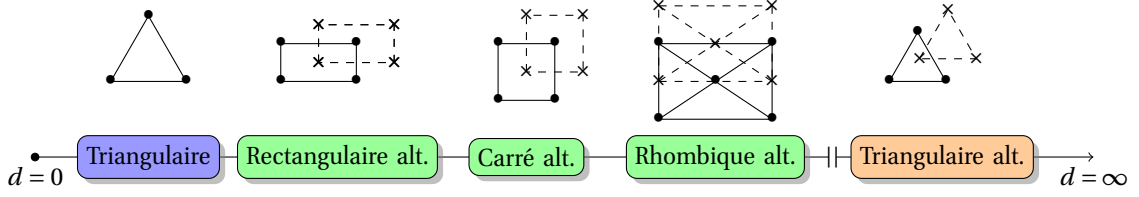


FIGURE 3.2 Diagramme de phase de la bicouche sous champ magnétique, en fonction de la distance d entre les couches. Ce diagramme est valide pour tous les facteurs de remplissages $\nu < 1/2$ [NH95]. Les distances critiques qui séparent les différentes phases ne sont pas spécifiées car elles dépendent du facteur de remplissage, et diminuent avec celui-ci. La double barre indique la seule transition du premier ordre de ce diagramme, et « alt. » est une abbréviations pour « alterné ».

du pseudospin avec un axe donné. En minimisant l'énergie Hartree-Fock par rapport à ces paramètres, Narasimhan et Ho [NH95] ont trouvés cinq phases différentes dans l'ensemble des parties du diagramme de phase de la bicouche à $\nu \leq 1/2$ qu'ils ont considérées¹, c'est-à-dire pour $\nu = 1/5$ et $\nu = 1/3$. À facteur de remplissage donné, la succession des phases lorsque la distance augmente est donnée par la figure 3.2.

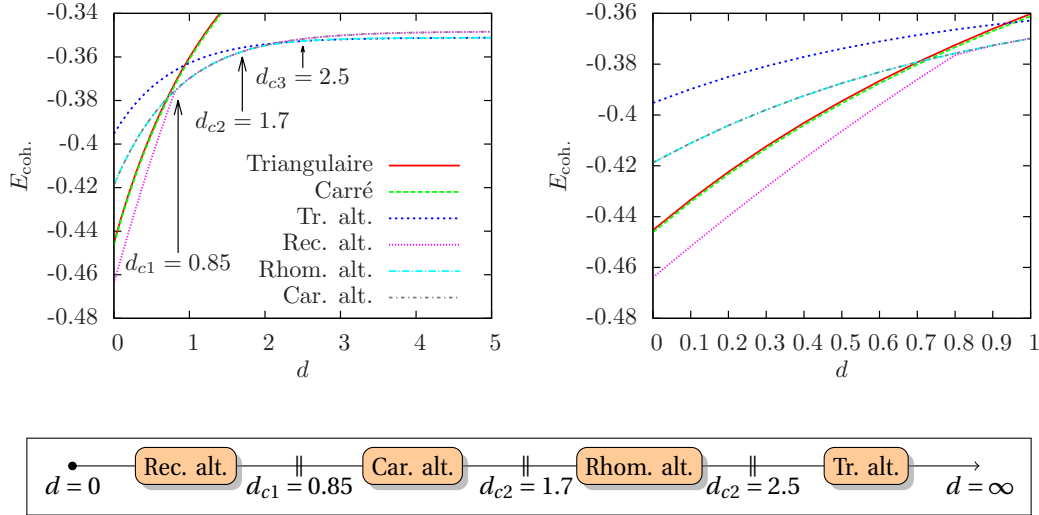


FIGURE 3.3 Énergies de cohésion des cristaux de Wigner dans la bicouche à $\nu = 1/2$. À ce facteur de remplissage le cristal de Wigner de plus basse énergie est un réseau rectangulaire alterné à distance nulle, de paramètre de dilatation $\alpha \approx 2.6$. À $d_{c1} = 0.85$ une transition vers un cristal carré alterné survient, puis celui-ci se déforme continûment en un cristal rhombique alterné à partir de $d_{c2} = 1.7$, et précède une transition vers un cristal triangulaire alterné à $d_{c3} = 2.5$. Les abréviations « tr. », « car. », « rhom. » et « alt. » renvoient respectivement à triangulaire, carré, rhombique, et alterné. La figure de droite est un agrandissement de celle de gauche sur les petites valeurs de d .

La forme du réseau cristallin évolue avec la distance. À $d = 0$, on est confronté à une situation particulière où l'interaction possède une symétrie $SU(2)$. Le cristal a ainsi tendance à baisser non seulement l'énergie directe mais aussi l'énergie d'échange, comme dans un état ferromagnétique. Le résultat est donc un cristal de Wigner avec une polarisation de pseudospin ferromagnétique. Ce cristal évolue continûment en un réseau rectangulaire alterné. En effet, on peut voir le réseau triangulaire comme la limite d'un réseau rectangulaire

1. Notons que la référence [NH95] tient compte du terme tunnel comme paramètre supplémentaire de la bicouche; celui-ci défavorise les cristaux alternés et modifie donc les valeurs des transitions entre les différents cristaux de Wigner.

avec un paramètre de dilatation $\alpha_{d=0} = 3^{\frac{1}{4}}$. Lorsqu'on augmente davantage la distance on trouve finalement un réseau carré alterné qui est lui-même continûment connecté au réseau rectangulaire.

Les réseaux alternés offrent un compromis entre la minimisation de l'énergie intra-couche, et la minimisation de l'énergie d'interaction inter-couches qui diminue avec la distance. Aux distances intermédiaires c'est ce compromis qui favorise le réseau carré alterné. Lorsque la distance est plus grande la partie intra-couche domine encore plus l'interaction, et le réseau carré alterné se déforme continûment en un réseau rhombique alterné, qui profite de la faible répulsion inter-couche pour minimiser la répulsion intra-couche plus encore.

Enfin, aux distances importantes les deux couches sont indépendantes et deux réseaux triangulaires se forment naturellement. Afin de minimiser la répulsion inter-couches résiduelle les nœuds du réseau d'une couche se placent dans les interstices du réseau de l'autre couche, et le cristal de plus basse énergie a un réseau triangulaire alterné.

Par rapport à ces résultats, j'ai exploré la succession des phases cristallines par un calcul Hartree-Fock à $\nu = 1/2$, dont les énergies sont tracées sur la figure 3.3. Ce facteur de remplissage ne fait pas partie des valeurs considérées dans la référence [NH95] et présente une particularité. Pour la comprendre, considérons d'abord la monocouche à $\nu = 1/2$. Si l'on suppose que la dégénérescence de spin est complètement levée (voir discussion de la section 1.3.3) alors le hamiltonien d'interaction projeté dans le plus bas NL a la symétrie particule-trou à $\nu = 1/2$. Cette symétrie particule-trou exclut le réseau triangulaire, en faveur de réseaux qui sont leur propre réseau dual tels que le réseau rectangulaire. Pour cette raison, on trouve que le cristal de plus basse énergie dans la bicouche à $d = 0$ n'a pas un réseau triangulaire contrairement à tous les autres facteurs de remplissages, mais un réseau rectangulaire. En effet, à $d = 0$ et pour des fermions sans spin l'énergie d'échange favorise les états complètement polarisés comme pour le spin physique, et le système se comporte effectivement comme une monocouche.

3.2 Diagrammes de phase de la bicouche dans le plus bas niveau de Landau

En complétant le calcul Hartree-Fock des énergies des phases cristallines par un calcul Monte-Carlo des énergies des états de Hall quantiques fractionnaires on peut obtenir le diagramme de phase de la bicouche, en supposant que l'on a considéré toutes les phases pertinentes. Les états de Hall quantiques fractionnaires sont des états fortement corrélés et pour cette raison on ne peut calculer leur énergie par la méthode de Hartree-Fock, car ils ne se réduisent pas à un déterminant de Slater d'états à un corps. La méthode la plus précise pour déterminer l'énergie des états de Hall est le Monte-Carlo variationnel. Cette méthode, présentée dans l'annexe C, a peu à peu remplacé les méthodes analytiques offertes par l'« hyper-net chain » [Lau83a] et l'analogie plasma [LWM84, GJ84] dans la littérature. Contrairement au calcul Hartree-Fock, le calcul Monte-Carlo amène une incertitude qui sera représentée par une barre d'erreur sur l'énergie.

3.2.1 Demi-remplissage de la bicouche : état (331) et liquides de Fermi de fermions composites

Je m'intéresse d'abord à $\nu = 1/2$ afin de compléter l'étude de la section précédente sur le diagramme de phase des cristaux par la comparaison aux phases liquides. De plus, c'est à demi-remplissage que la bicouche présente l'intérêt le plus fort. En effet à $\nu = 1/2$ l'effet Hall quantique n'est pas observé dans les systèmes monocomposantes, mais il peut l'être dans les systèmes à deux composantes dans les conditions appropriées, l'état sous-jacent trouvant une description adéquate dans l'état de Halperin (331). En effet, un EHQP a été observé dans la bicouche [EBP⁺92] pour $d \sim 2$, alors que pour $d \rightarrow \infty$ on retrouve deux SBE

découplés. Dans cette limite, on s'attendrait alors à trouver des LFFC compressibles à $\nu_\sigma = 1/4$ dans chacune des couches [TPJ05]. En sus de l'état (331) et du LFFC, j'ai considéré l'état pfaffien et vérifié que son énergie est supérieure à celle du LFFC pour toutes les distances d . Les énergies de ces états ainsi que celles des cristaux de Wigner sont tracées sur la figure 3.4. L'état (331) apparaît bel et bien stable pour des distances intermédiaires entre les couches. À grande distance une transition vers deux LFFCs indépendants (2-LFFCs) a lieu à $d \simeq 3.1$ et le système devient métallique, comme on s'y attend. Cette valeur est cohérente avec celle trouvée expérimentalement [EBP⁺92] et confirme théoriquement les résultats de la référence [SJ01]. À courte distance, l'état fondamental est un LFFC tant que $d \lesssim 0.3$. Ces résultats prédisent donc un domaine de stabilité important pour l'état (331), donné par $0,3 < d < 3$. Les phases cristallines étant situées à plus haute

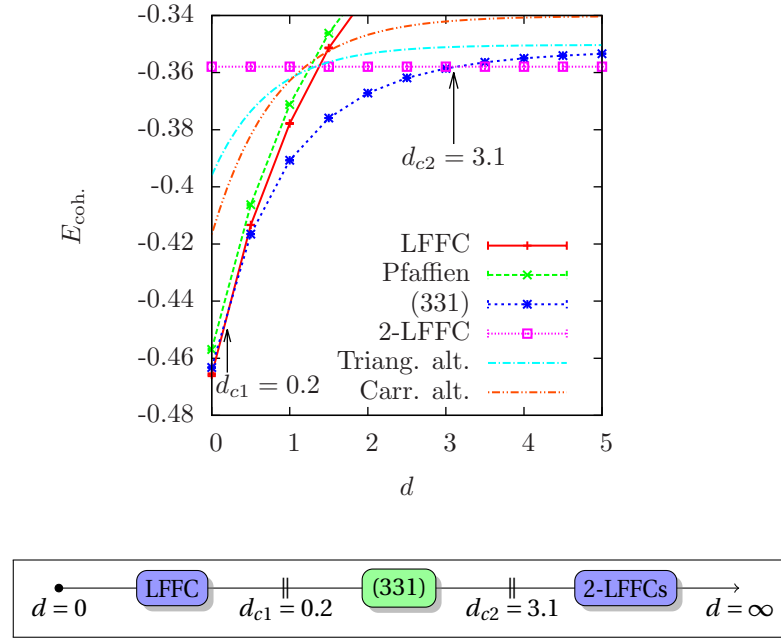


FIGURE 3.4 Énergies de cohésion de différents cristaux de Wigner et états de Hall quantiques fractionnaires dans la bicouche à $\nu = 1/2$ et diagramme de phase correspondant. L'énergie de cohésion des deux liquides de Fermi de fermions composites indépendants (2-LFFCs) ne dépend pas de la distance, car dans la mesure où les deux composantes sont indépendantes, leur énergie inter-couches compense exactement celle du fond homogène qui donne la référence d'énergie, pour toute valeur de d .

énergie sont absentes du diagramme de phase de la bicouche à $\nu = 1/2$. Dans la monocouche, les calculs les plus récents donnent $\nu < 1/(5.6 \pm 0.5)$ comme critère de stabilité du cristal de Wigner triangulaire [EK95]. Dans la bicouche, on s'attend donc à ce que les cristaux puissent apparaître, au moins aux grandes distances, pour $\nu < 1/2.8$, c'est-à-dire pour une densité $\nu < 1/5.6$ par couche. Pour cette raison j'étudie le cas $\nu = 1/3$ dans lequel des transitions entre phases cristallines et phases liquides sont plus plausibles qu'à $\nu = 1/2$, du fait que la densité soit plus faible.

3.2.2 La bicouche à $\nu = 1/3$: effet Hall quantiques mono- et multicomposantes

À $\nu = 1/3$, on sait que l'état fondamental du SBE dans la bicouche est bien décrit par l'état de Laughlin aux faibles distances. Dans un raisonnement à deux composantes, cet état peut être vu comme un état de

ν	1/2	1/4	1/6	1/8
E_{LFFC}	$-0,4656 \pm 0,0001$	$-0,3604 \pm 0,0001$	$-0,3010 \pm 0,0003$	$-0,2640 \pm 0,0001$
Ref. [Md95]	$-0,466$	$-0,3608$	_____	_____
Ref. [PMABJ98]	$-0,46557$	_____	_____	_____
Ref. [TmHJ07]	$-0,4651(1)$	$-0,36014(4)$	_____	_____
CW	$-0,4484$	$-0,3544$	$-0,2994$	$-0,2636$
CWC	$-0,4525$	$-0,3582$	$-0,3019$	$-0,2654$

TABLE 3.1 Énergie du liquide de Fermi de fermions composites à différents facteurs de remplissage en comparaison avec des valeurs de la littérature. La première ligne indique les résultats obtenus par extrapolation polynomiale d'ordre 2 pour $N \leq 72$. La référence [Md95] est un article de Morf et d'Ambrumenil datant de 1995 dans lequel ceux-ci se sont restreints à 12 électrons, tandis que la référence [PMABJ98] considère des systèmes contenant jusqu'à 50 électrons; enfin dans la référence [TmHJ07] – la plus récente – la taille du système atteint $N = 64$. Mentionnons la référence [SJ01] dans laquelle l'énergie du LFFC à $\nu = 1/4$ est implicitement comparée à l'énergie d'autres phases. Les énergies des cristaux de Wigner corrélés sont issues de [EC90]. Si l'on ne prend pas en compte les corrélations du CW le LFFC a toujours une énergie plus basse que le CW pour les facteurs de remplissages présentés, alors qu'en prenant en compte les corrélations l'état cristallin est favorisé pour $\nu \leq 1/6$. L'état de plus basse énergie est indiqué en gras.

Halperin (333) polarisé en pseudospin. En effet, dans les états monocomposantes tels que l'état de Laughlin chaque électron peut occuper les deux couches à la fois afin de minimiser l'énergie d'interaction, l'état ainsi obtenu est toujours un état à une composante, mais il est polarisé dans le plan xy afin de peupler de manière équilibrée les deux couches et ainsi minimiser l'énergie de charge. Cela se traduit par un potentiel d'interaction plus faible $(V_{\text{intra}} + V_{\text{inter}})/2 < V_{\text{intra}}$ par une polarisation dans le plan xy alors que le potentiel d'interaction serait V_{intra} pour une polarisation selon l'axe z , *i.e.* lorsqu'une seule couche est peuplée. Cet amoindrissement de l'énergie d'interaction offert par la polarisation dans le plan xy est illustré sur la figure 3.5, qui compare l'énergie de l'état de Laughlin polarisé suivant z (contenu dans une seule couche) à celle de l'équivalent polarisé dans le plan (état de Halperin (333)).

Un état à deux composantes qui correspond également à $\nu = 1/3$ est l'état de Halperin (551), et il s'avère que celui-ci peut-être stabilisé au détriment de l'état de Laughlin à $d \gtrsim 1$. Ceci peut être vu sur le diagramme énergétique de la figure 3.6. La situation à grande distance est plus difficile à trancher. La bicouche à $\nu = 1/3$ est équivalente à deux couches indépendantes chacune à $\nu = 1/6$. À $\nu = 1/6$ les énergies du cristal de Wigner triangulaire et du LFFC sont très proches, avec un léger avantage pour la phase cristalline.; il faut donc prendre en compte les corrélations du cristal de Wigner pour trancher. Pour ce faire j'ai calculé l'énergie d'interaction intra-couche du cristal de Wigner triangulaire à par tir de la formule [EC90]

$$E_{\text{CWC}}(\nu = 1/6) = -0,782133\sqrt{\nu} + 0,2410\nu^{\frac{3}{2}} + 0,087\nu^{\frac{5}{2}} \quad (3.15)$$

et j'ai ajouté l'énergie de cohésion intra-couche. Ce faisant j'ai négligé les corrections à l'énergie inter-couches apportée par les corrélations intra-couches. Celles-ci sont négligeables aux grandes distances entre les couches, qui est de toute manière le seul domaine où le cristal de Wigner entre en compétition avec l'état fondamental.

En résumé, à $\nu = 1/3$ dans la bicouche l'état de Laughlin est stabilisé pour $d \lesssim 1$, puis l'état (551) est favorisé. Aux grandes distances ($d \gtrsim 2.2$), le système est formé de deux cristaux de Wigner corrélés à l'intérieur de chaque couche, mais avec des corrélations inter-couches négligeables.

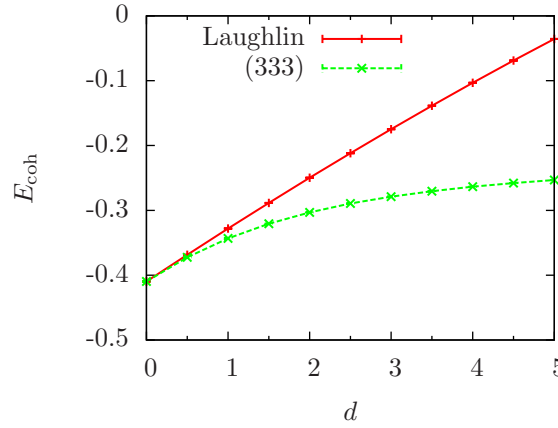


FIGURE 3.5 Énergie de l'état de Laughlin et de l'état (333) dans la bicouche. L'état (333) est équivalent à un état de Laughlin polarisé dans le plan xy ; on voit que cette orientation de la polarisation abaisse l'énergie d'interaction, pour les distances $d > 0$ entre les couches. La dégénérescence à $d = 0$ reflète la limite $SU(2)$ du potentiel d'interaction où toutes les polarisations sont équivalentes.

3.2.3 La bicouche à $\nu = 1/4$: un diagramme de phase riche

Je complète cette étude de la bicouche dans le plus bas NL par le diagramme de phase à $\nu = 1/4$. À ce facteur de remplissage deux états de Halperin différents sont possibles, (553) et (771), et on peut se demander si l'un d'entre eux peut être stabilisé dans la bicouche, les deux états proposant des corrélations inter-couches différentes. Au-delà des phases liquides quantique, on se retrouve dans une limite de faible densité ($\nu_\sigma = 1/8$ par couche), et on peut s'attendre à une compétition plus pertinente avec les cristaux de Wigner, notamment pour $d \rightarrow \infty$. La figure 3.7 montre les énergies obtenues pour toutes les phases pertinentes à ce facteur de remplissage. Le LFFC a l'énergie la plus basse aux faibles distances, c'est-à-dire dans le régime monocomposante. Aux distances intermédiaires ($1 \lesssim d \lesssim 2$) l'état (553) le remplace. Enfin à grande distance la situation est plus riche que les deux cas exposés précédemment. Le CW carré alterné est favorisé pour $2 \lesssim d \lesssim 3$ tandis qu'au delà l'état fondamental du système est un CW triangulaire alterné d'après mes calculs. Notons enfin qu'un état (771) n'est pas réalisé. Même s'il a une plus basse énergie que les autres liquides quantiques pour $d \gtrsim 3$, il reste plus haut en énergie que le cristal de Wigner. Mes calculs suggèrent ainsi qu'un EHQP de type Halperin pourrait être observé dans une bicouche dans un régime intermédiaire ($1,6 \lesssim d \lesssim 2,3$) à $\nu = 1/4$. Ceci ressemble en effet à la situation à $\nu = 1/2$ à deux différences près. Premièrement on s'attend à un état isolant (cristal de Wigner) à des distances élevées entre couches alors que l'état à $\nu = 1/2$ redevient un métal compressible. Deuxièmement, l'écart en énergie entre l'état (553) et le cristal électronique isolant de plus basse énergie (carré alterné) est nettement moins bien prononcé que celui entre (331) et les autres états à $\nu = 1/2$. La prise en compte du désordre peut alors être nécessaire afin de déterminer la nature de l'état fondamental à ces distances pour $\nu = 1/4$. Alors qu'un tel calcul est au-delà de la portée de cette thèse, on peut néanmoins spéculer que le désordre favorise les états cristallins. En effet, en raison de leur compressibilité, ils peuvent mieux s'adapter à ce potentiel de désordre que les états incompressibles. Si un état (551) est alors l'état fondamental, on s'attend à l'observer uniquement dans des systèmes de très haute mobilité.

Au vu des trois facteurs de remplissages étudiés dans cette section, le diagramme de phase dans la bicouche dans le plus bas NL est riche. En fonction de la distance entre les couches et du facteur de remplissage de nombreuses phases différentes peuvent être observées, aux comportements électriques différents. Les diagrammes de phase aux remplissages $\nu = 1/2, 1/3, 1/4$ sont montrés sur la figure 3.8

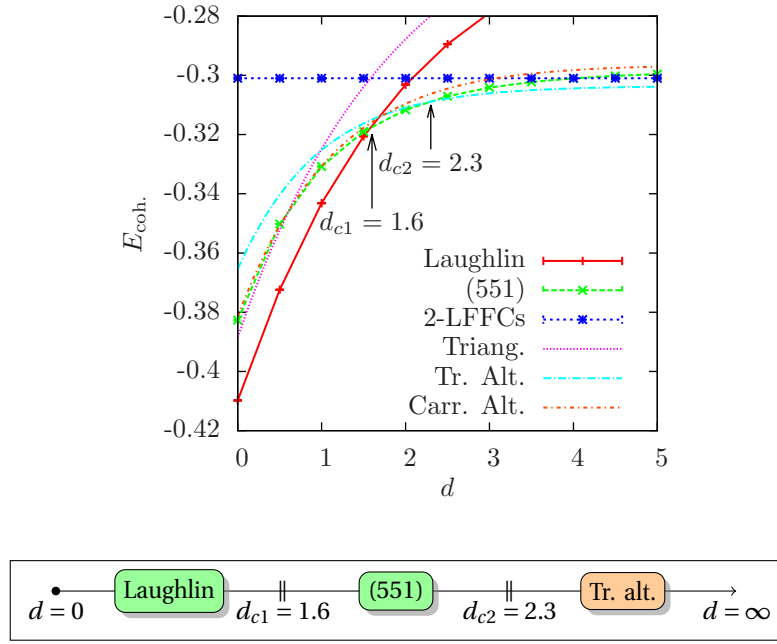


FIGURE 3.6 Energies de cohésion de différents cristaux de Wigner et états de Hall quantiques fractionnaires dans la bicouche à $\nu = 1/3$, et diagramme de phase correspondant. Par souci de clarté toutes les phases cristallines ne sont pas représentées. À grande distance la compétition fine entre les 2-LFFCs et le cristal de Wigner triangulaire ne peut être arbitrée qu'en prenant en compte les corrélations du cristal (voir tableau 3.1).

en fonction de d . Ces états sont monocomposantes à courte distance, multi-composante aux distances intermédiaires, tel l'état de Halperin (331) à $\nu = 1/2$ et éventuellement cristallins aux grandes distances, pour les facteurs de remplissage suffisamment faibles.

3.3 Second niveau de Landau

Dans cette section je reproduis les calculs de la section précédente dans le second NL. Dans les NLs supérieurs, les phases potentielles sont enrichies par les cristaux appariés tels que le cristal de bulles et celui de rubans présentés dans la section 2. En effet, alors que ceux-ci ne sont pas pertinents dans le plus bas NL, l'existence de plateaux dans le potentiel coulombien projeté favorise cet appariement dans les NLs excités. Cette tendance à l'appariement s'exprime également dans la compétition entre les états liquides. À demi-remplissage par exemple, dans la limite monocomposante $d \simeq 0$ on a vu dans la section précédente que cette compétition tourne en faveur du liquide de Fermi de fermions composite (LFFC) dans le plus bas NL; dans le second NL, elle est remportée par l'état pfaffien [PMABJ98] qui en est l'*alter ego* apparié (voir section 2.3.3).

Si l'on néglige le mélange entre NLs, la dépendance du problème vis-à-vis de l'indice du NL est complètement spécifiée par le facteur de forme $F_n(q)$ de l'interaction coulombienne que l'on a déterminé dans le chapitre 2,

$$\nu_n(q) = \nu(q) [F_n(q)]^2 = \nu(q) \left[L_n \left(\frac{q^2}{2} \right) \right]^2 e^{-\frac{q^2}{2}}, \quad (3.16)$$

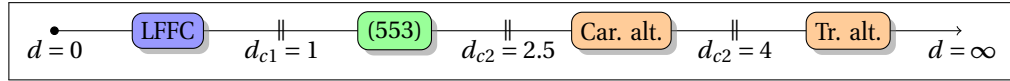
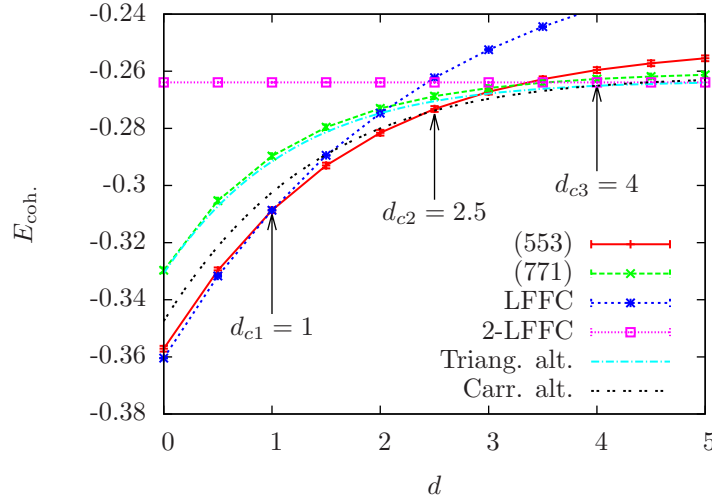


FIGURE 3.7 Energies de cohésion de différents cristaux de Wigner et états de Hall quantiques fractionnaires dans la bicouche à $\nu = 1/4$, et le diagramme de phase qui s'en déduit.

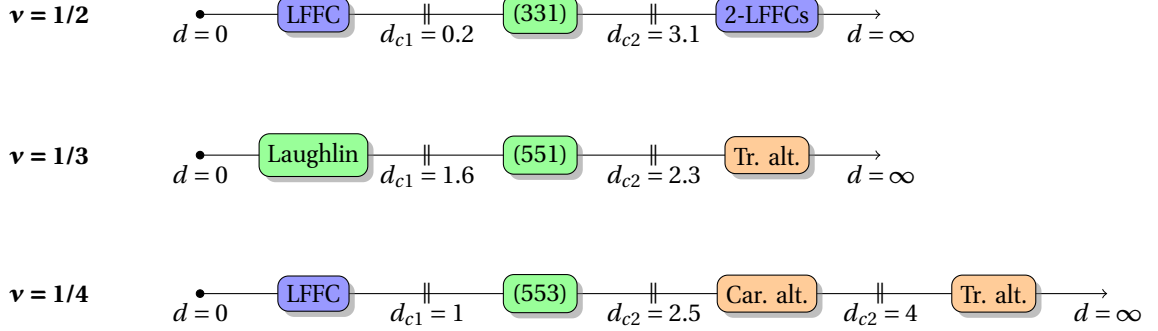


FIGURE 3.8 Diagrammes de phase de la bicouche dans le plus bas niveau de Landau aux facteurs de remplissages considérés dans ce chapitre ($\nu = 1/2, 1/3, 1/4$). Les étiquettes bleues indiquent les états métalliques de fermions composites, le vert désigne les états qui sous-tendent l'effet Hall quantique, et les cases oranges correspondent aux cristaux électroniques isolants.

où L_n désigne le polynôme de Laguerre d'ordre n . Les potentiels d'interaction intra- et inter-couches s'écrivent donc, dans le n -ième NL,

$$v_{\uparrow\uparrow}(q) = v_{\downarrow\downarrow}(q) = \frac{2\pi}{q} \left[L_n \left(\frac{q^2}{2} \right) \right]^2 e^{-\frac{q^2}{2}} \quad \text{et} \quad v_{\uparrow\downarrow}(q) = v_{\downarrow\uparrow}(q) e^{-qd}. \quad (3.17)$$

Les énergies des phases cristallines dans les NLs excités sont donc simplement obtenues en remplaçant le potentiel d'interaction coulombien par le potentiel (3.17) dans les calculs Hartree-Fock. En revanche le calcul Monte-Carlo de l'énergie des états liquides nécessite l'expression du potentiel d'interaction dans l'espace réel. Celui-ci est donné par la transformée de Fourier inverse du potentiel (3.17), qui n'a pas d'expression

analytique simple². En effet la projection du potentiel d'interaction dans un NL donné est plus facile à exprimer dans l'espace réciproque que dans l'espace réel. Le calcul Monte-Carlo requiert un nombre très important d'évaluations du potentiel dans l'espace réel, pour cette raison on a besoin d'une expression relativement simple pour celui-ci.

Interaction effective gaussienne pour les calculs Monte-Carlo dans les niveaux de Landau supérieurs

Une solution efficace consiste à remplacer l'interaction de Coulomb projetée dans le n -ième NL, obtenue par transformation de Fourier inverse du potentiel (3.17), par une interaction effective différente, mais qui produit les *mêmes pseudopotentiels*. Étant donné que les pseudopotentiels spécifient complètement l'interaction en champ magnétique, pour deux interactions qui produisent les mêmes pseudopotentiels l'énergie est la même. Plusieurs choix sont possibles, j'ai opté pour une interaction effective « gaussienne » de la forme

$$V_{\text{eff}}^{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{1}{r} + \sum_{k=0}^{k_{\text{max}}} C_k^{\uparrow\downarrow} r^{2k} e^{-r^2} \quad (3.19)$$

$$V_{\text{eff}}^{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \sum_{k=0}^{k_{\text{max}}} C_k^{\uparrow\downarrow} r^{2k} e^{-r^2}, \quad (3.20)$$

dont les termes gaussiens décrivent l'écart par rapport au potentiel coulombien qui est représenté par les premiers termes des membres de droite dans les expressions (3.19) et (3.20), et ne corrigent que la partie courte portée de l'interaction à cause du terme $\exp(-r^2)$.

Les coefficients $C_k^{\sigma\sigma'}$ sont déterminés par la contrainte selon laquelle les k_{max} premiers pseudopotentiels du potentiel d'interaction initial sont égaux aux M premiers pseudopotentiels de l'interaction effective. Le choix du nombre k_{max} de pseudopotentiels à reproduire exactement résulte d'un compromis. Une grande valeur de k_{max} produit une interaction effective fidèle, mais qui a des oscillations importantes. Or les oscillations du potentiel mènent à une convergence d'une lenteur rédhibitoire pour les calculs Monte-Carlo. J'ai opté pour $k_{\text{max}} = 4$, c'est-à-dire que je reproduis uniquement les cinq premiers pseudopotentiels exactement. Pour l'interaction intra-couche $V_{\text{eff}}^{\uparrow\uparrow}(r)$ ceci mène à

$$\{C_0^{\uparrow\uparrow}, C_1^{\uparrow\uparrow}, \dots, C_4^{\uparrow\uparrow}\} = \{94.3888, -418.394, 345.422, -85.9117, 6.17702\} \quad (3.21)$$

tandis que pour l'interaction inter-couches les coefficients dépendent de la distance. On peut voir sur la figure 3.9 – pour laquelle $d = 2$ – que, bien que l'interaction effective gaussienne ne reproduise que les cinq premiers pseudopotentiels, les pseudopotentiels suivants sont également très bien approximés, avec une erreur relative inférieure à 3%. Encore une fois, je rappelle que cette interaction effective gaussienne est très avantageuse pour les calculs Monte-Carlo à venir.

Notons enfin que tous ces pseudopotentiels sont évalués dans le plan, alors que le calcul Monte-Carlo qui fait usage de cette interaction effective sera mené sur la sphère, néanmoins on s'attend à ce que la différence entre les pseudopotentiels évalués sur la sphère diffèrent peu de leur pendant sur le disque aux tailles importantes que l'on considère ($N \lesssim 70$). Tous les calculs présentés dans le reste de cette section font usage de l'interaction effective gaussienne.

2. Le terme intra-couche s'écrit

$$\begin{aligned} V_1^{\uparrow\uparrow}(r) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} v_1(q) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{dq}{2\pi} v_1(q) J_0(qr) \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} \left[\left(r^4 - 2r^2 + 6 \right) I_0\left(\frac{r^2}{4}\right) - r^4 I_1\left(\frac{r^2}{4}\right) \right] ; \end{aligned} \quad (3.18)$$

mais le terme inter-couche n'admet pas une telle expression analytique.

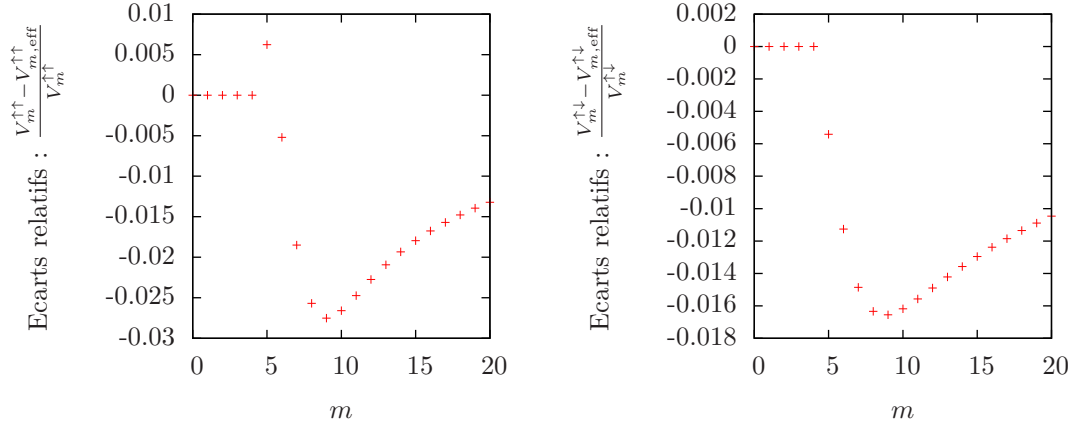


FIGURE 3.9 Ecarts relatifs des pseudopotentiels du second niveau de Landau avec ceux de l'interaction effective gaussienne, dans les secteurs intra-composantes (gauche) et inter-composantes (droite) pour $d = 2$. Les écarts relatifs sont de l'ordre de 1% pour le cas montré ici ($d = 2$), mais également pour toutes les distances entre $d = 0$ et $d = 5$.

3.3.1 $\nu = 5/2$: compétition entre l'état pfaffien et l'état (331)

À $\nu = 5/2$ l'état cristallin de plus basse énergie parmi ceux considérés ici est le cristal de bulles triangulaire aux faibles distances, et un cristal de Wigner triangulaire pour $d \gtrsim 0,7$ (figure 3.10). Notons qu'à demi-remplissage des NLs on s'attend à ce que le cristal de plus basse énergie soit un cristal de ruban dans la limite monocomposante $d \approx 0$ [Fog02], le fait que l'on trouve une énergie plus basse pour le cristal de bulle triangulaire vient du traitement inévitables des corrélations internes aux rubans/bulles que l'on a fait dans ce manuscrit. Alors que la fonction d'onde (2.114) du cristal de bulles prend en compte les corrélations électroniques internes aux bulles, l'ansatz (2.118) pour la densité des rubans ne tient pas compte de ces mêmes corrélations. La question de l'état cristallin de plus basse énergie à $d \approx 0$ ne peut donc pas être tranchée par les calculs présentés ici. Cependant, le tracé des énergies des états de Hall quantique (figure 3.11) montre que les états cristallins sont de toute manière supplantés à $\nu = 5/2$, et la question précédente est donc secondaire.

Le diagramme de phase à $\nu = 5/2$ est identique à celui du plus bas NL, en dehors du fait que dans le régime monocomposante, à faible distance, c'est l'état Pfaffien et non le LFFC qui est l'état fondamental. Ainsi l'EHQF peut être observé dans la bicouche aux très faibles distances. Cependant l'état (331) souffre beaucoup plus de la distance que dans le plus bas NL, et celui-ci n'est stable que pour $d \lesssim 1$. Expérimentalement, il est possible de créer une bicouche dont les couches sont très proches, tout en conservant un terme tunnel négligeable du fait de la hauteur de la barrière entre les couches. On peut garder le facteur de remplissage constant et varier la longueur en modifiant simultanément la densité électronique et le champ magnétique. Ce faisant on modifie la distance entre les couches, et les calculs présentés sur la figure 3.11 suggèrent que l'on peut induire des transitions entre un état de Hall monocomposante (l'état pfaffien) et un état multicomposante (l'état (331)) lorsque la distance atteint la valeur critique $d_{c1} \approx 0.5$, vers un état à 2-LFFCs à $d_{c2} \approx 1$.

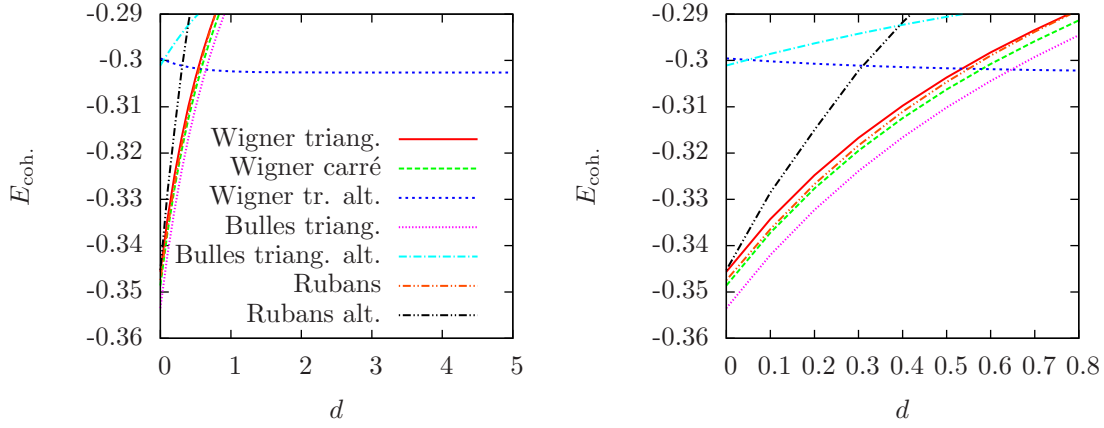


FIGURE 3.10 Energies de cohésion des phases cristallines dans la bicouche à $\nu = 5/2$, *i.e.* à demi remplissage du second NL. Le cristal de bulles triangulaire est l'état cristallin de plus basse énergie aux faibles distances. Dans le régime multicomposantes (aux distances non-négligeables entre les couches) le cristal de bulles triangulaire est supplanté par le cristal de Wigner triangulaire (pour $d \gtrsim 0,7l_B$). La figure de droite est un agrandissement pour les petites valeurs de d .

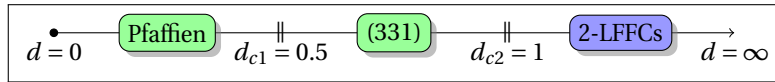
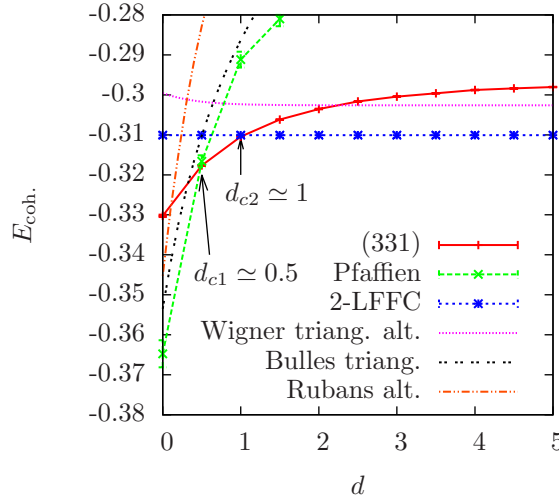


FIGURE 3.11 Energies de cohésion de la bicouche à $\nu = 5/2$, *i.e.* à demi remplissage du second NL, et diagramme de phase associé. À faible distance l'état Pfaffien est stabilisé, comme attendu, et dans les couches très éloignées deux LFFCs indépendants se forment. Aux distances intermédiaires l'état (331) peut être stabilisé dans une gamme de distances ($0.5 < d < 1$) plus restreinte que dans le plus bas NL, pour lequel l'état (331) est stabilisé pour $0.2 < d < 3.1$.

3.3.2 $\nu = 7/3$: Laughlin dans le second niveau de Landau

On a vu qu'il y a une première différence qualitative, à demi-remplissage, entre le plus bas NL et le second. En effet, alors que l'état fondamental dans une bicouche de faible distance est un LFFC compressible dans le plus bas NL, l'effet Hall quantique – incarné par un état pfaffien – peut-être stabilisé lorsque les deux couches sont très proches. Cette différence ne concerne que les faibles distances auxquelles le système bicouche se comporte effectivement comme un système monocomposante, dans lequel chaque électron est dans l'état $|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$ et peuple ainsi les deux couches à la fois. Néanmoins le diagramme de phase de la figure 3.11 montre que dans le régime multicomposante il n'y a pas de différence qualitative entre le plus bas NL et le second.

Dans ce paragraphe je m'intéresse à un système bicouche à $\nu = 7/3$, c'est-à-dire à $\bar{\nu} = 1/3$ dans le second NL. Le tracé des énergies des phases cristallines (figure 3.12) montre qu'à ce facteur de remplissage les états cristallins appariés, c'est-à-dire les cristaux de bulles, ne sont pas pertinents. Ceux-ci ont seulement une énergie plus basse que le cristal de Wigner conventionnel aux densités plus élevées ($\bar{\nu} \simeq 1/2$) ou dans les NLs supérieurs.

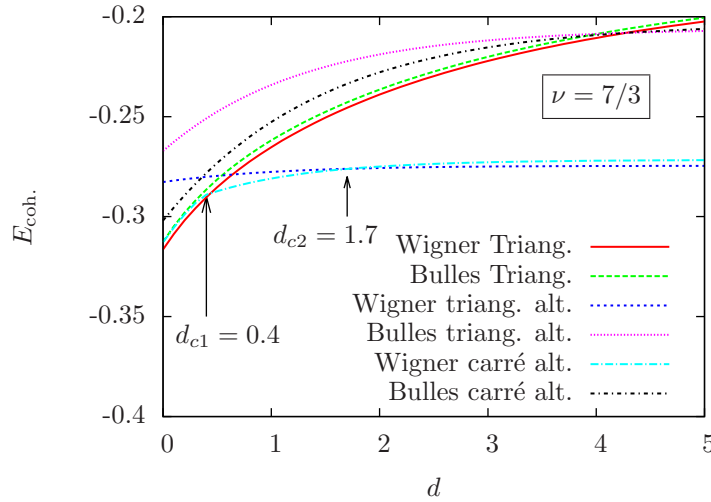


FIGURE 3.12 Energies de cohésion des phases cristallines dans la bicouche à $\nu = 7/3$, i.e. à $\bar{\nu} = 1/3$ dans le second NL. Les cristaux de bulles ($M = 2$) ont une énergie plus grande que les cristaux de Wigner ($M = 1$) pour toutes les distances.

Cette observation ramène le problème de la bicouche à $\nu = 7/3$ à celui à $\nu = 1/3$, dans la mesure où les phases appariées ne s'avèrent avoir une énergie plus grande que les cristaux conventionnels, et donc elles ne sont pas pertinentes. La différence avec le plus bas NL réside seulement dans l'expression du potentiel effectif. Comme à $\nu = 1/3$, l'état de Laughlin est stabilisé aux faibles distances ($d < d_{c1} = 0.7$) et l'état (551) est favorisé pour les distances intermédiaires ($d < d_{c2} = 3.1$), et seules les valeurs critiques de transition d_{c1} et d_{c2} sont modifiées (voir figure 3.13). C'est à grande distance qu'une différence qualitative apparaît entre les deux plus bas NLs. Dans le plus bas NL, pour $d > 3$ l'énergie du cristal de Wigner triangulaire alterné est très proche de celle des 2-LFFCs, et la prise en compte des corrélations du cristal permet de trancher en faveur de celui-ci. Sur la figure 3.13 on voit que l'écart en énergie aux grandes distances entre le cristal de Wigner triangulaire alterné (non corrélé) avec les 2-LFFCs ($\Delta E(d=5) \simeq 0.004$) est plus important que dans le plus bas NL ($\Delta E(d=5) \simeq 0.002$), ainsi on peut s'attendre à ce que les corrélations ne permettent au cristal de se stabiliser que dans le plus bas NL.

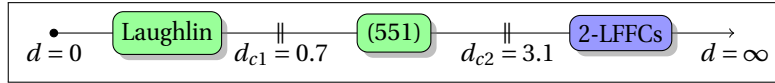
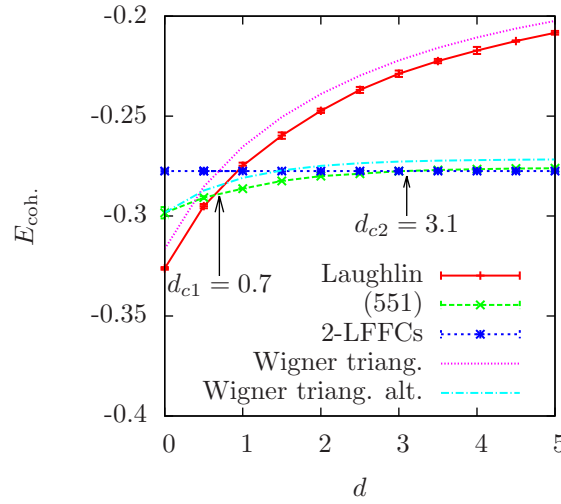


FIGURE 3.13 Energies de cohésion de la bicouche à $\nu = 7/3$, *i.e.* à $\bar{\nu} = 1/3$ dans le second NL, et diagramme de phase associé. Comme dans le plus bas NL aux faibles distances l'effet Hall quantique fractionnaire est possible, il est sous-tendu par l'état de Laughlin pour $d < 0.7$ et par l'état (551) pour $d < 3.1$. La distance critique de transition entre l'état de Laughlin et l'état (551) est plus faible que dans le plus bas NL (pour lequel $d_{c1} = 1.6$). Une différence qualitative avec le plus bas NL apparaît ici, à savoir qu'aux grandes distances, dans la limite des couches découplées, deux liquides de Fermi de fermions composite, chacun à $\nu_{\uparrow\downarrow} = 1/6$, sont stabilisés.

Dans ce cas, aux grandes distances le système apparaît sous la forme d'un 2-LFFCs à $\nu = 7/3$, et on obtient le diagramme de phase présenté sur la figure 3.13.

3.3.3 $\nu = 9/4$: le règne des états métalliques

Le diagramme énergétique des phases pertinentes à $\nu = 9/4$ est surprenant. Comme pour $\nu = 7/3$, le tracé des énergies des phases cristallines (figure 3.14a) montre que seuls les cristaux de Wigner sont pertinents à $\nu = 9/4$, comme on s'y attend à un facteur de remplissage aussi faible dans le second niveau de Landau. Les surprises sont apportées par les phases liquides (figure 3.14b), car les phases de plus basses énergie sont uniquement des liquides Fermi de fermions composites, dans sa version monocomposante pour $d < 2.2l_B$ et dans sa version à deux composantes décorréelées pour les distances plus grandes.

Ce résultat contraste fortement avec ceux du plus bas NL, qui montrent un diagramme riche de quatre phases différentes (figure 3.4). À $\nu = 1/4$ l'état de plus basse énergie est également un LFFC aux petites distances, mais lorsque la distance augmente l'état (553) est stabilisé, puis une phase cristalline émerge, d'abord avec un réseau carré alterné puis triangulaire alterné aux plus grandes distances. Dans le second NL le liquide de Fermi de fermions composites semble largement favorisé à $\nu_{\uparrow} = \nu_{\downarrow} = 1/8$, ainsi l'état formé de deux liquides de Fermi de fermions composites indépendants l'est aussi, à $\nu_{\text{total}} = 1/4$, et il empêche l'apparition des phases cristallines, ainsi que de l'état d'effet Hall quantique fractionnaire (553). Ce résultat suggère que le domaine cristallin du diagramme de phase pourrait être décalé vers les faibles valeurs

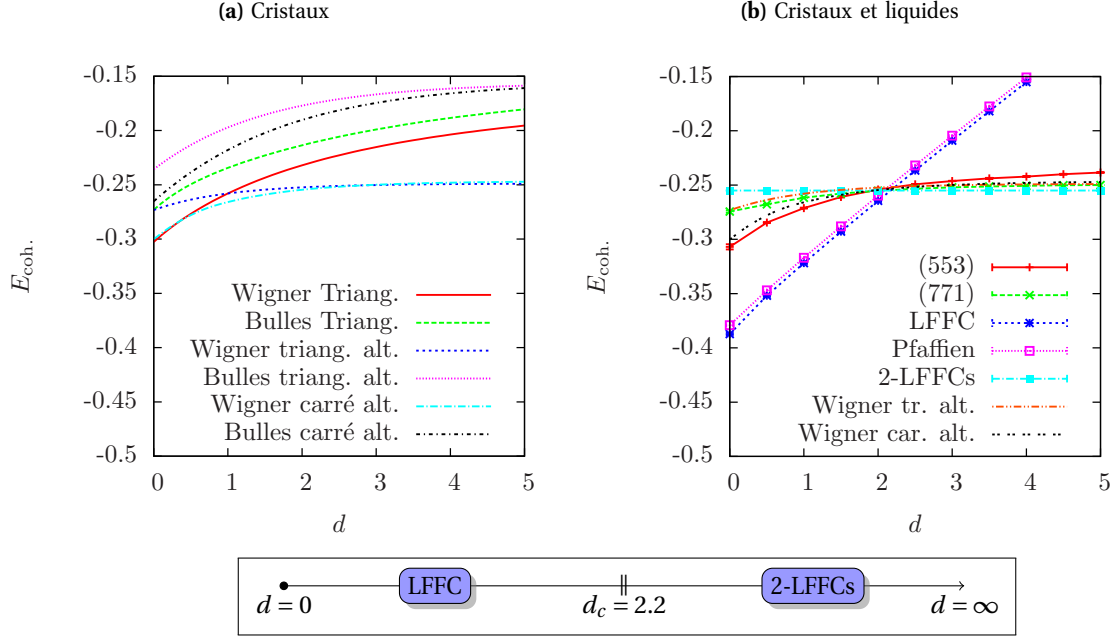


FIGURE 3.14 Énergies et diagramme de phase de la bicouche dans le second niveau de Landau à $\nu = 9/4$. La situation est très différente du plus bas NL, dans la mesure où les deux liquides de Fermi de fermions composites décorrélés (2-LFFCs) accaparent le diagramme de phase dans tout le régime multicomposante. Ceci confirme le fait que le domaine de prédilection des cristaux est repoussé vers les plus faibles valeurs du facteur de remplissage projeté $\bar{\nu}$ dans les NLs supérieurs.

de $\bar{\nu}$, dans les NLs supérieurs. Cette hypothèse est corroborée par les études menées dans les systèmes monocomposante [GLMS04].

3.4 Bicouche biaisée

J'ai considéré une bicouche symétrique jusqu'alors, dans laquelle les potentiels chimiques des deux couches sont identiques. Dans cette section je m'intéresse à une bicouche dissymétrique – ou « biaisée » – dans laquelle il existe une différence de potentiel chimique Δ entre les deux couches. Cette différence peut-être due à une dissymétrie de la structure semi-conductrice elle-même, due par exemple à un dopage inéquitable des couches, ou elle peut être induite par l'application d'une tension de grille entre les deux couches. Le dispositif expérimental correspondant et le potentiel de confinement associé sont schématisés sur la figure 3.15.

L'intérêt de cette étude résulte de l'observation d'un EHQF anormal à $\nu = 4/11$ [PST⁺03]. Même si cet état a été mis en évidence dans un système avec une seule couche, le SBE représente une grande largeur. Alors que cet état a été interprété en terme de deuxième génération de FCs – en effet $\nu = 4/11$ correspond à un facteur de remplissage $\nu^* = 1 + 1/3$ pour les FCs – on peut construire un état de Halperin à deux composantes, (532), au même facteur de remplissage. Or cet état décrit, par l'équation (2.15), un état asymétrique avec un remplissage $1/11$ dans la première et $3/11$ dans la seconde composante. Un système naturel pour stabiliser un tel état est donc la bicouche avec une différence de potentiel entre les couches. Dans une première approche on modélise le puits large asymétrique par une bicouche biaisée puis on étudie

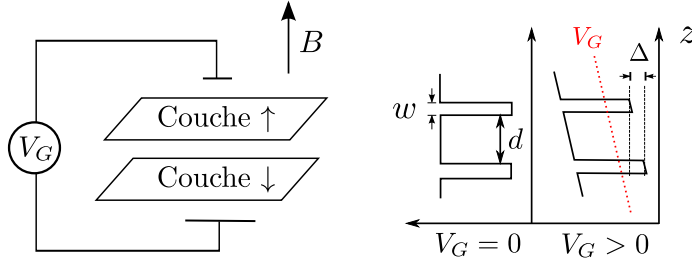


FIGURE 3.15 Dispositif expérimental de la bicouche biaisée (gauche). L'application d'une tension de grille entre les deux couches biaise le potentiel de confinement ; les deux couches n'ont plus le même potentiel chimique (droite).

la stabilité de l'état de Halperin (532) dans ce système. On revisitera cet état ultérieurement dans un modèle plus réaliste de puits large asymétrique (chapitre 5).

En présence du biais, le hamiltonien de la bicouche (3.7) est agrémenté d'un terme Zeeman $-\Delta \bar{S}_z(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ dans le langage du pseudospin, où Δ est la différence de potentiel chimique entre les deux couches et $\bar{S}_z(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ est la partie homogène de la composante suivant z du pseudospin projeté dans le plus bas niveau de Landau. Le hamiltonien prend donc la forme

$$H_{\text{bicouche}} = V = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_+(q) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}) + 2 \sum_{\mathbf{q}} V_-(q) \bar{S}_z(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) - \Delta \bar{S}_z(\mathbf{q} = \mathbf{0}). \quad (3.22)$$

Notons qu'en l'absence de terme tunnel le hamiltonien commute avec $\bar{S}_z(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ qui est alors un « bon nombre quantique ».

La bicouche symétrique permet la stabilisation d'états de halperin « symétriques », tels l'état (331), à $\nu = 1/2$. On peut aussi écrire des fonctions de Halperin asymétriques

$$\Phi_{(m_1, m_1, n)}([z]) = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{m_1} \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^{m_1} \prod_{l, \gamma} (z_l - z_\gamma)^n, \quad (3.23)$$

dont les indices m_1 et m_1 sont différents. Ces indices traduisent les corrélations internes aux deux composantes, et lorsqu'ils sont différents les électrons s'évitent plus dans une couche que dans l'autre.

Comme on aborde cet état par la diagonalisation exacte, l'état (532) est déterminé par son facteur de remplissage donné par l'équation (2.22)

$$\nu_{(532)} = \frac{4}{11}, \quad (3.24)$$

et par un shift sur la sphère

$$\delta_{(532)} = -\frac{7}{2}, \quad (3.25)$$

d'après (2.23).

Les tailles de systèmes accessibles sont donc données par

$$N_B = \nu^{-1} N + \delta = \frac{11}{4} N - \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4N_B = 11N - 14. \quad (3.26)$$

Les solutions entières de cette équation diophantienne sont données par $N = 4n + 2$, avec $n \in \mathbb{N}$. Hormis $N = 2$, les deux seules tailles accessibles numériquement sont $N = 6$ et 10 (Pour $N = 10$, l'espace de Hilbert

a pour dimension $\dim(\mathcal{H}) \simeq 35 \times 10^6$ dans le secteur $S_z = 0$, $L_z = 0$). Pour ces deux tailles on génère numériquement l'état fondamental du hamiltonien (3.22) de la bicouche biaisée, et on calcule la polarisation

$$P = \frac{|N_\uparrow - N_\downarrow|}{N} = \frac{2|S_z|}{N} \in [0; 1] \quad (3.27)$$

qui décrit la différence de densité des couches. Elle est nulle lorsque les deux couches sont équitablement peuplées, et vaut 1 lorsque tous les électrons sont dans la même couche. Elle est tracée pour les deux tailles accessibles sur la figure 3.16.

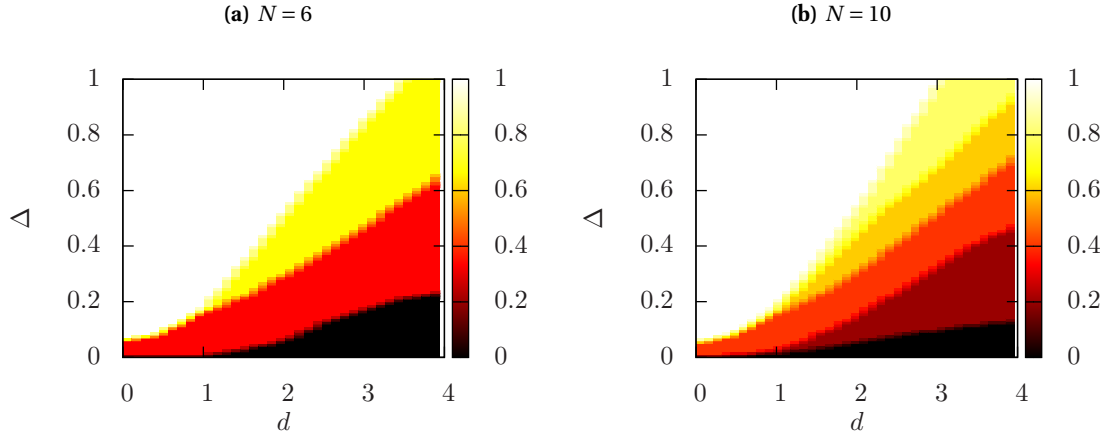


FIGURE 3.16 Polarisation de l'état fondamental dans la bicouche biaisée pour $N = 6$ et $N = 10$. En l'absence de biais Δ les deux couches sont équitablement peuplées ($P = 0$), tandis que pour des biais très importants tous les électrons sont dans la même couche ($P = 1$). Les régions ayant la même polarisation que l'état (532) sont orange.

La polarisation de l'état (532) se déduit de l'équation 2.19, elle vaut

$$P_{(532)} = \frac{|N_\uparrow - N_\downarrow|}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}, \quad (3.28)$$

soit $P_{(532)} = 1/3$ pour $N = 6$ et $P_{(532)} = 2/5$ pour $N = 10$. Ces deux valeurs de la polarisation correspondent aux régions oranges des diagrammes de la figure 3.16. Le recouvrement de (532) avec l'état fondamental est nul en dehors de ces régions, car les deux états sont alors dans des secteurs de S_z différents (figure 3.17). Le recouvrement est tracé dans la région dans laquelle l'état fondamental a la polarisation requise, sur la figure 3.18.

Au vu du recouvrement élevé, on peut conclure que l'état (532) peut être stabilisé dans une bicouche, pour des distances faibles $d \lesssim 2$. Pour que l'état fondamental ait la polarisation requise ($P = 1/2 - 1/N$) un biais Δ est nécessaire; la valeur que celui-ci doit prendre augmente avec la distance. On peut estimer la valeur du biais à appliquer pour stabiliser l'état (532) à $\Delta = d/10$ au vu de la figure 3.17. La possible stabilisation d'un état de Halperin asymétrique dans une bicouche biaisée montre que l'intérêt des bicouches sous champ magnétique n'est pas limité au cas symétrique. Le fait que la présence d'un biais soit nécessaire à la stabilisation de l'état (532) suggère que l'EHQF peut être *induit* par l'application d'une tension de grille qui dissymétrise les deux couches, à certains facteurs de remplissages tels que $\nu = 4/11$.

Enfin, je rappelle que cette partie a pour but de tester la validité de l'état de Halperin (532) pour la description de l'effet Hall quantique fractionnaire observé à $\nu = 4/11$ dans un puits large [PST⁺03]. On voit ici que la description par la bicouche corrobore cette hypothèse. Dans le chapitre 5 cette étude sera complétée par une modélisation réaliste du potentiel de confinement du puits large.

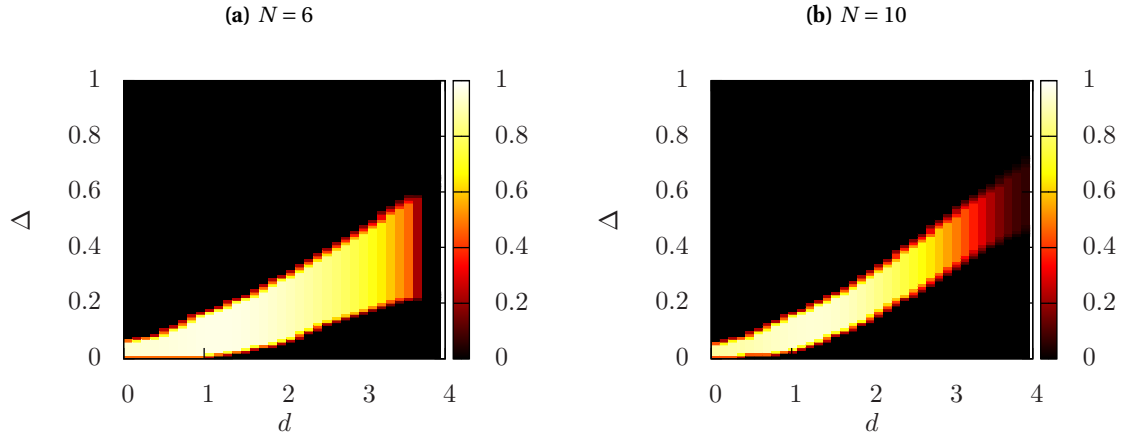


FIGURE 3.17 Recouvrement de (532) avec l'état fondamental dans la bicouche biaisée pour $N=6$ et $N=10$.

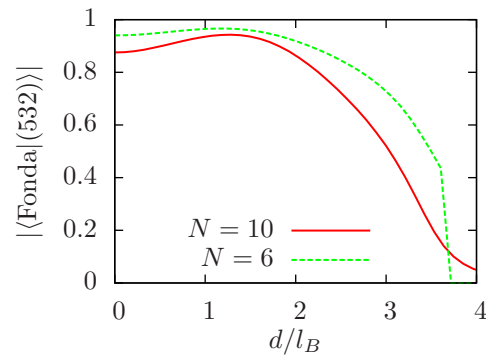


FIGURE 3.18 Recouvrement de (532) avec l'état fondamental dans la bicouche biaisée pour $N=6$ et $N=10$, dans la région de concordance de polarisation de l'état fondamental et de (532) (Régions colorées des diagrammes de la figure 3.17).

Chapitre 4

États électroniques corrélés dans le puits large symétrique

Le puits quantique d'AlGaAs/GaAs est aujourd'hui le dispositif expérimental qui permet l'observation la plus nette de l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF) à de très nombreux facteurs de remplissage [STG99], et il constitue l'outil le plus utilisé pour l'étude du système bidimensionnel d'électrons (SBE) sous champ magnétique. Il y a deux raisons à ce plébiscite, la première est d'ordre pratique. Le puits quantique d'AlGaAs/GaAs, surtout celui de grande largeur, permet d'atteindre des mobilités électroniques très grandes, de l'ordre de 10^7 cm²/Vs, et ainsi il réduit le rôle des impuretés de l'échantillon. Les plateaux de la résistance de Hall associés à l'EHQF sont plus marqués, et la résistance longitudinale s'annule de manière plus prononcée ; autrement dit l'état quantique sous-jacent est plus stable.

En plus de cet intérêt pratique, le puits large enrichit la Physique d'un degré de liberté supplémentaire de sous-bande. Cette complexification n'est pas nécessairement défavorable à l'observation de l'effet Hall quantique fractionnaire, mais elle en altère les conditions. Le gap de sous-bande Δ qui sépare les deux plus basses sous-bandes est proportionnel à l'inverse de la largeur au carré, w^{-2} . Dans un puits fin ($w \leq 50$ nm) il est donc très supérieur à l'énergie d'interaction, les électrons sont alors tous dans la plus basse sous-bande et le degré de liberté correspondant est gelé. Au contraire, dans les puits plus larges le gap de sous-bande est plus faible, et la première sous-bande excitée peut influencer sur les propriétés de basse énergie du système. Bien que l'énergie de Fermi soit toujours située entre les deux plus basses sous-bandes dans les expériences, la première sous-bande excitée peut être peuplée à cause des interactions. En effet, l'énergie d'interaction est amoindrie dans les sous-bandes supérieures en raison de l'apparition de nœud dans la fonction d'onde associée au confinement, et s'instaure alors une compétition entre le coût en énergie de sous-bande et le gain en énergie d'interaction.

Le but de ce chapitre est d'établir le diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$. À facteur de remplissage donné les deux paramètres du puits large symétrique sont sa largeur w – qui détermine le gap de sous-bande et l'interaction effective – et la densité n . La littérature sur ce sujet est abondante et les résultats théoriques et expérimentaux nombreux, à ce point qu'un diagramme de phase expérimental a pu être établi [SLS⁺13] en rassemblant des résultats existants [SES⁺92, SMY⁺94, LPT⁺08] et en les complétant par quelques mesures supplémentaires. Notons que la plupart des études théoriques se sont faites dans le cadre du modèle de bicouche effective. Dans le présent chapitre nous adoptons une vision plus réaliste, basée sur des travaux de Papic *et al.* [PMM⁺09], qui tiennent compte des deux plus basses sous-bandes électroniques dans un modèle à deux composantes. Ce modèle a d'abord été utilisé pour étudier les états d'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 1/2$ et $\nu = 1/4$ dans le cadre d'un calcul de diagonalisation exacte [PMM⁺09].

Nous proposons ici d'utiliser ce modèle pour un calcul variationnel qui nous permet de comparer les différentes phases en compétition.

Trois phases sont observées expérimentalement, dont une phase métallique à faible densité ou dans un puits fin. En raison de l'importance du gap de sous-bande, cette phase correspond au régime monocomposante ; si celui-ci est adiabatiquement connecté au cas $w = 0$ l'état fondamental est un liquide de Fermi de fermions composite, ce qui expliquerait le comportement métallique. Dans le puits très large – ou à forte densité – une phase isolante est observée, qui peut s'interpréter soit comme une localisation individuelle des électrons autour des impuretés, ou bien comme la formation d'une phase cristalline, qui s'accrocherait *collectivement* aux impuretés. Un des objectifs de ce chapitre est de trancher cette question, et ainsi déterminer la nature de la phase isolante. Enfin dans un régime intermédiaire l'effet Hall quantique est observé, l'état sous-jacent étant généralement interprété comme un état de Halperin (331). Dans ce chapitre je détermine le domaine de stabilité de l'état (331) vis-à-vis des autres candidats, et le compare avec le domaine de stabilité de l'effet Hall quantique dans les expériences. Cette comparaison permet de tester la validité de l'état de Halperin (331) pour la description de l'effet Hall quantique observé dans le puits large à $\nu = 1/2$, et de compléter le diagramme de phase expérimental.

Le chapitre est structuré comme suit. Après une introduction à la relation entre le modèle d'un puits large et celui de la bicouche effective (4.1), je discuterai les phases cristallines (4.2) avant de les comparer aux phases liquides afin d'établir le diagramme de phase du puits large sous champ magnétique (4.3). L'approche est la même que celle du chapitre 3, mais les diagrammes de phase sont tracés en fonction de deux paramètres, la largeur du puits et la densité électronique, ce qui permet en partie de faire varier le gap de sous-bande (en unités de $e^2/4\pi\epsilon l_B$) de manière indépendante de la largeur w/l_B .

4.1 Hamiltonien d'interaction et bicouche effective dans le puits large

4.1.1 Rappel du modèle

Je modélise le puits large symétrique par un puits carré infini présenté dans la section 1.1.3. Ce choix est justifié par le fait que, dans les puits quantiques à base d'AlGaAs, la barrière de potentiel est très haute (~ 200 meV) par rapport au gap de sous-bande. De plus, on s'intéresse à des propriétés générales qui ne dépendent pas des détails de la forme du potentiel de confinement mais seulement du fait que sa largeur ne puisse pas être négligée, au point que la première sous-bande excitée ne doit pas être omise *a priori*.

Les états propres – les états « de sous-bandes » – du puits carré infini de largeur w sont donnés par (voir l'équation (1.7) du chapitre 1)

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{w}} \times \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi z}{w}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \\ \sin\left(\frac{n\pi z}{w}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (4.1)$$

et ils sont représentés sur la figure 4.1. L'énergie de la n -ième sous-bande vaut

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \times \frac{n^2}{w^2}, \quad (4.2)$$

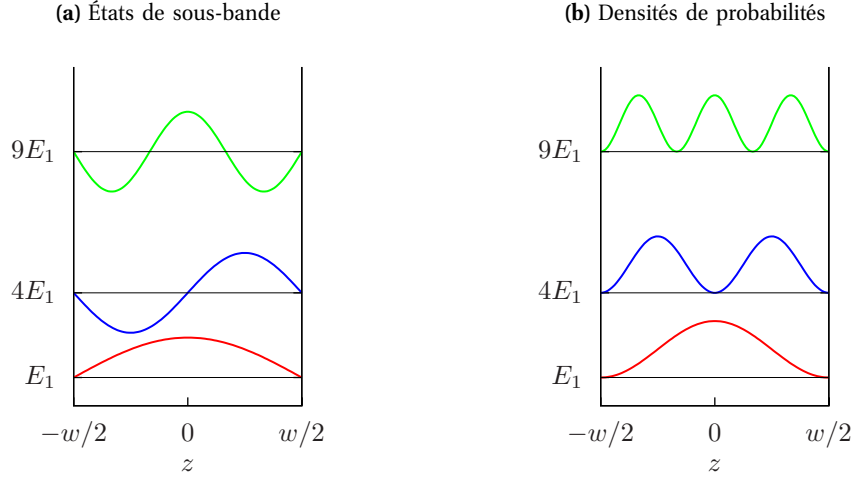


FIGURE 4.1 Les trois premiers états propres du puits carré et les densités de probabilité associées. Dans la mesure où l'on s'intéresse aux propriétés de basse énergie du système on ne conservera que les deux plus basses dans la suite et on les nommera \uparrow et \downarrow .

et le gap de sous-bande vaut donc

$$\Delta = \frac{E_2 - E_1}{e^2 / (4\pi\epsilon l_B)} = \frac{5,98 \times \sqrt{B[\text{T}]}}{(w/l_B)^2} \quad (4.3)$$

en unités magnétiques et dans l'arséniure de Gallium. Le degré de liberté de sous-bande devient pertinent lorsque $\Delta \lesssim 1$, c'est-à-dire dans les grands puits et/ou à faible champ magnétique. Notons que je ne retiens que la première sous-bande excitée. La promotion d'un électron dans la deuxième sous-bande excitée coûte une énergie importante ($8\Delta/3$), pour cette raison on peut suspecter que les sous-bandes supérieures n'interviennent pas dans les propriétés de basse énergie du système (voir figure 4.1). La validité de cette approximation sera justifiée *a posteriori* par la suite en prenant en compte la troisième sous-bande explicitement.

Parce qu'on ne conserve que les deux plus basses sous-bandes, on traite le degré de liberté correspondant comme un pseudospin-1/2 et l'on note \uparrow la plus basse sous-bande et \downarrow la première sous-bande excitée. Comme il a été mentionné dans la section 1.1, la différence majeure avec un vrai spin réside dans le fait que l'interaction effective du puits large n'a pas la symétrie de rotation dans l'espace de pseudospin, car l'interaction dépend de l'indice de sous-bande impliqué.

Le potentiel d'interaction de Coulomb s'écrit

$$V = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_4} \iint \frac{\psi_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{x}) \psi_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{x}') \psi_{\sigma_4}(\mathbf{x}') \psi_{\sigma_3}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (4.4)$$

en unités de l'énergie coulombienne typique $e^2/4\pi\epsilon l_B$, en notant $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z)$ les vecteurs tridimensionnels et où $\sigma_i = \uparrow, \downarrow$ sont les pseudospins de sous-bande.

On obtient le potentiel d'interaction effectif du puits large en intégrant le potentiel de Coulomb selon l'axe z du potentiel de confinement; il est donné par l'équation (1.13) que je réécris ici

$$V_{\text{eff.}}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(r) = \iint \frac{\varphi_{\sigma_1}^*(z) \varphi_{\sigma_2}^*(z') \varphi_{\sigma_3}(z) \varphi_{\sigma_4}(z')}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz dz'. \quad (4.5)$$

En termes de potentiel effectif le potentiel d'interaction s'écrit

$$V = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_4} \iint \psi_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{r}') V_{\text{eff}}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi_{\sigma_4}(\mathbf{r}') \psi_{\sigma_3}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (4.6)$$

c'est un potentiel d'interaction pour des électrons bidimensionnels avec spin.

Pour les calculs de diagonalisation exacte à venir je donne l'expression du potentiel d'interaction dans la base des orbites de Landau du plus bas NL, indexées par leur moment cinétique m ,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\{m_i\}} \sum_{\{\sigma_i\}} V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4} c_{m_1 \sigma_1}^\dagger c_{m_2 \sigma_2}^\dagger c_{m_4 \sigma_4} c_{m_3 \sigma_3}, \quad (4.7)$$

où les coefficients $V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4}$ sont obtenus à partir des pseudopotentiels $V_m^{\sigma_1 \dots \sigma_4}$ et des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle m_i m_j | m M \rangle$

$$V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4} = \sum_{m, M} \langle m_1 m_2 | m M \rangle V_m^{\sigma_1 \dots \sigma_4} \langle m M | m_3 m_4 \rangle. \quad (4.8)$$

Les pseudopotentiels s'obtiennent à leur tour à partir de l'interaction effective

$$V_m^{\sigma_1 \dots \sigma_4} = \int d\mathbf{r} V^{\sigma_1 \dots \sigma_4}(r) |\langle r | m, M \rangle|^2 \quad (4.9)$$

où $\langle r | m, M \rangle$ est la fonction d'onde à deux corps dans l'état de moment cinétique relatif m , tandis que le résultat ne dépend pas du moment cinétique total M de la paire. Le tracé des pseudopotentiels pour $w/l_B = 10$, visible sur la figure 4.2, montre que l'interaction effective est plus faible dans la première sous-bande excitée, comme on s'y attend. Pour comparaison, j'y ai tracé les pseudopotentiels de l'interaction coulombienne dans un puits infiniment étroit. L'abaissement de $V_m^{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}$ (et $V_m^{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow}$) s'explique généralement par la largeur du puits qui permet plus efficacement aux électrons de s'éviter. Naturellement cet effet est plus prononcé à courte portée, et donc à faible valeur de m . L'adoucissement de l'interaction à courte portée se traduit par l'abaissement du terme V_1 par rapport au terme V_3 . Cet abaissement relatif rapproche l'interaction effective du puits large de l'interaction de Coulomb projetée dans le second NL. Pour cette raison je considérerai l'état pfaffien par la suite qui, bien qu'initialement proposé pour décrire l'EHQF à demi-remplissage du *second* NL, pourrait être stabilisé dans le puits large. Notons enfin que l'interaction effective est plus faible dans la première sous-bande excitée (↓) que dans la plus basse (↑). Comme on l'a vu plus haut, ceci traduit le fait que la répulsion y est plus faible en raison du nœud dans la fonction d'onde $\varphi_\downarrow(z)$.

Le hamiltonien complet de notre modèle est obtenu en ajoutant le terme de sous-bande au terme d'interaction (4.7). Le terme de sous-bande associe un coût énergétique Δ au peuplement de la première sous-bande excitée, il s'écrit

$$H_{\text{s.b.}} = -\Delta S_z = -\frac{\Delta}{2} (n_\uparrow - n_\downarrow) = -\frac{\Delta}{2} \sum_m \left(c_{m,\uparrow}^\dagger c_{m,\uparrow} - c_{m,\downarrow}^\dagger c_{m,\downarrow} \right) \quad (4.10)$$

après redéfinition de l'origine de l'énergie. Finalement le hamiltonien complet

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\{m_i\}} \sum_{\{\sigma_i\}} V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4} c_{m_1 \sigma_1}^\dagger c_{m_2 \sigma_2}^\dagger c_{m_4 \sigma_4} c_{m_3 \sigma_3} - \frac{\Delta}{2} \sum_m \left(c_{m,\uparrow}^\dagger c_{m,\uparrow} - c_{m,\downarrow}^\dagger c_{m,\downarrow} \right), \quad (4.11)$$

je rappelle que le terme cinétique est absent du fait de la projection dans le plus bas NL.

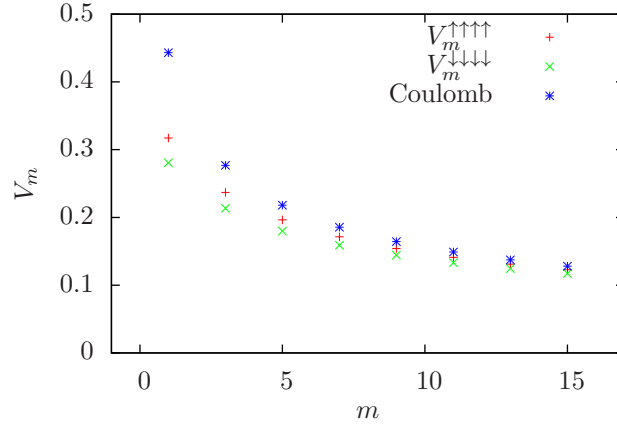


FIGURE 4.2 Pseudopotentiels des deux plus basses sous-bandes du puits large pour $w = 10l_B$, et pseudopotentiels de l'interaction de Coulomb pure pour un puits infiniment étroit. Seuls les pseudopotentiels impairs sont tracés car ce sont les seuls pertinents pour des électrons, du fait de leur nature fermionique. Dans les deux sous-bandes, l'interaction effective est réduite par rapport à l'interaction de Coulomb pure dans un puits infiniment étroit, notamment à courte portée. De plus, l'interaction effective est plus faible dans la première sous-bande excitée (↓) que dans la plus basse sous-bande (↑).

4.1.2 Bicouche effective et états de Halperin « tournés »

Lorsque le gap de sous-bande Δ est grand devant l'énergie d'interaction seule la plus basse sous-bande est peuplée. Dans le cas contraire les électrons peuvent tirer profit du degré de liberté de sous-bande pour minimiser leur énergie d'interaction. Une manière relativement simple de le faire consiste à peupler uniquement la première sous-bande excitée, dans laquelle le potentiel d'interaction effectif est plus faible que dans la plus basse sous-bande. Un compromis entre ces deux situations est offert par la bicouche effective.

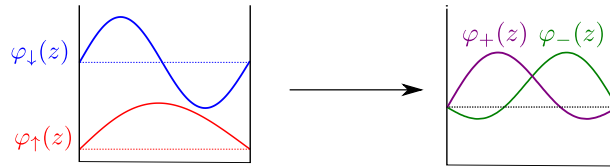


FIGURE 4.3 Fonctions d'onde de sous-bandes (états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$) et bicouche effective formée par les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

Au lieu d'être dans la sous-bande \uparrow ou \downarrow , chaque électron peut être dans une superposition linéaire quelconque de celles-ci. Un moyen efficace de minimiser l'énergie d'interaction consiste à placer la moitié des électrons dans l'état $|+\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ localisé près d'un bord du potentiel de confinement et l'autre moitié dans l'état $|-\rangle = (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$, localisé près de l'autre bord (voir figure 4.3). Cette configuration réalise une bicouche effective dont les couches sont les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$. La bicouche effective est donc obtenue par une rotation de $\pi/2$ dans l'espace de pseudospin à partir de la base des sous-bandes (voir figure 4.4) et pour cette raison je parlerai de « base tournée ».

Les deux composantes des états de Halperin les plus appropriées ne sont donc pas forcément les sous-bandes $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, mais si un modèle de bicouche est pertinent, on s'attend à ce que les composantes idoines

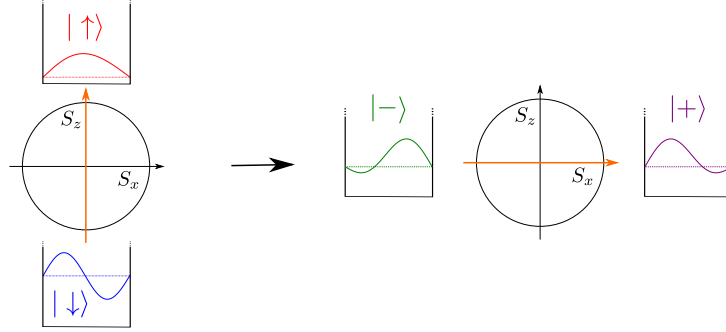


FIGURE 4.4 Bicouche effective et rotation de pseudospin (flèche orange). Les sous-bandes (états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$) sont les états propres de l'opérateur de pseudospin S_z tandis que les couches effectives $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont les états propres de S_x . La bicouche effective est donc obtenue par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace de pseudospin, à partir des sous-bandes.

soient $|+\rangle$ et $|-\rangle$. Autrement dit dans le puits large symétrique les fonctions de Halperin pertinentes sont

$$\Psi_{(m_+ m_- n)}([z]) = \mathcal{A} \left[\Phi_{(m_+ m_- n)}([z]) \underbrace{+\cdots+}_{N/2} \underbrace{-\cdots-}_{N/2} \right], \quad (4.12)$$

qui ne font intervenir que les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans leur partie spinorielle (la partie orbitale Φ est toujours donnée par l'expression (2.15)). En effet, Papić *et al.* [PMM⁺09] ont montré que les fonctions tournées (4.12) peuvent avoir un bon recouvrement avec l'état fondamental du système alors que les fonctions de Halperin dans la base $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ décrivent mal le système (à $\nu = 1/2$ et $\nu = 1/4$). Dans la mesure où je m'intéresse au demi-remplissage, seule la fonction de Halperin (331) est pertinente. Comme il a été dit dans le chapitre 2, celle-ci est un état propre de S_z de valeur propre nulle lorsqu'elle est construite à partir des états \uparrow et \downarrow . La rotation de $\pi/2$ dans l'espace de pseudospin implique donc que notre fonction est état propre de S_x avec une valeur propre nulle.

Rotation dans l'espace de pseudospin

Une rotation d'angle θ de l'axe de quantification est équivalente à une rotation anti-horaire d'angle $\theta/2$ dans l'espace de pseudospin [CTDL73], on a donc

$$S_z^\theta = -\sin\theta S_x + \cos\theta S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} |\theta_+\rangle \\ |\theta_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$|\theta_\pm\rangle$ étant les états propres de l'opérateur S_z^θ . Leurs coefficients dans la base initiale des états propres de S_z sont

$$\begin{aligned} \langle\theta_+|\uparrow\rangle &= \cos\frac{\theta}{2} & \langle\theta_+|\downarrow\rangle &= -\sin\frac{\theta}{2} \\ \langle\theta_-|\uparrow\rangle &= \sin\frac{\theta}{2} & \langle\theta_-|\downarrow\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Deux stratégies sont possibles pour générer l'état de Halperin tourné numériquement. La première stratégie consiste à obtenir l'état de Halperin non tourné par diagonalisation de l'interaction modèle (2.28), dont il est l'unique état fondamental, puis à opérer une rotation dans l'espace de pseudospin sur l'état obtenu.

Une seconde méthode consiste à opérer la rotation sur l'interaction modèle et à en extraire l'état fondamental. Un ensemble de pseudopotentiels tels que ceux de l'interaction modèle des états de Halperin s'écrit

$$V_m^{[\sigma_i]} = \left(\prod \delta_{\sigma_i, \uparrow} \right) V_m^{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow} + \left(\prod \delta_{\sigma_i, \downarrow} \right) V_m^{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow} + \left[(\delta_{\sigma_1, \uparrow} \delta_{\sigma_2, \downarrow} + \delta_{\sigma_2, \uparrow} \delta_{\sigma_1, \downarrow}) (\delta_{\sigma_3, \uparrow} \delta_{\sigma_4, \downarrow} + \delta_{\sigma_4, \uparrow} \delta_{\sigma_3, \downarrow}) \right] V_m^{\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow} \quad (4.15)$$

et il devient, après rotation de la base de l'espace de pseudospin,

$$V_m^{[\pm_i]} = \langle \pm_1 \pm_2 | \hat{V}_m | \pm_3 \pm_4 \rangle = \sum_{\{\sigma_i\}} \langle \pm_1 \pm_2 | \sigma_1 \sigma_2 \rangle V_m^{[\sigma_i]} \langle \sigma_3 \sigma_4 | \pm_3 \pm_4 \rangle \quad (4.16)$$

L'expression de ces coefficients, c'est-à-dire les pseudopotentiels dans la base tournée, est donnée dans le tableau 4.1. On obtient l'état de Halperin tourné en extrayant l'état fondamental de l'interaction modèle exprimée dans la base tournée.

	$V_m^{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}$	$V_m^{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}$	$V_m^{\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow}$
V_m^{++++}	$\cos^4 \frac{\theta}{2}$	$\sin^4 \frac{\theta}{2}$	$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$
V_m^{+-++}	$\cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$-\cos \frac{\theta}{2} \sin^3 \frac{\theta}{2}$	$\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})$
V_m^{--++}	$\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$-2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$
V_m^{+--+}	$\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2}$
V_m^{-+-+}	$\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$-2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$
V_m^{----}	$\cos \frac{\theta}{2} \sin^3 \frac{\theta}{2}$	$-\cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})$
V_m^{----}	$\sin^4 \frac{\theta}{2}$	$\cos^4 \frac{\theta}{2}$	$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$

TABLE 4.1 Pseudopotentiels des interactions modèles des fonctions de Halperin et rotation (d'angle θ) dans l'espace de pseudospin. Si l'interaction spécifiée par les coefficients $V_m^{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}$, $V_m^{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}$ et $V_m^{\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow}$ a un état de Halperin pour état fondamental, l'état de Halperin tourné de θ dans l'espace de pseudospin est obtenu en diagonalisant l'interaction spécifiée par les pseudopotentiels écrits dans la première colonne (V_m^{++++} , V_m^{+-++} , ...). Les coefficients de ces pseudopotentiels sont obtenus en multipliant ceux de l'interaction effective originale par les termes écrits dans les cases.

Les deux manières d'obtenir les états de Halperin tournés qui viennent d'être décrites sont équivalentes ; j'ai vérifié sur plusieurs exemples que les états générés par les deux méthodes ont un recouvrement total dans la limite de la précision machine. Cependant la rotation des pseudopotentiels de l'interaction modèle est plus coûteuse en temps de calcul, car pour chaque angle il faut diagonaliser l'interaction modèle ; on lui préférera la rotation directe de l'état de Halperin qui ne nécessite qu'une seule diagonalisation.

Muni de ces méthodes pour générer numériquement les états de Halperin tournés, on peut vérifier que les composantes optimales pour l'état de Halperin à $\nu = 1/2$ dans le puits large sont les couches $|+\rangle$ et $|-\rangle$ de la bicouche effective. Pour ce faire on se référera à la figure 4.5 qui montre le recouvrement de l'état de Halperin avec l'état fondamental de l'interaction modèle du puits large (4.7), en fonction de l'angle de rotation θ dans l'espace de pseudospin. On trouve un angle de rotation optimal de $\pi/2$, angle pour lequel les deux composantes de l'état (331) sont les états de bicouche effective. Ce résultat n'est pas surprenant, comme cet angle est le seul qui décrit deux états identiques reliés par symétrie miroir, et l'état (331) a vocation à décrire deux composantes identiques. La base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ est donc la bonne base du sous-espace de sous-bande pour écrire l'état de Halperin dans le puits large. Cet observation justifie le choix

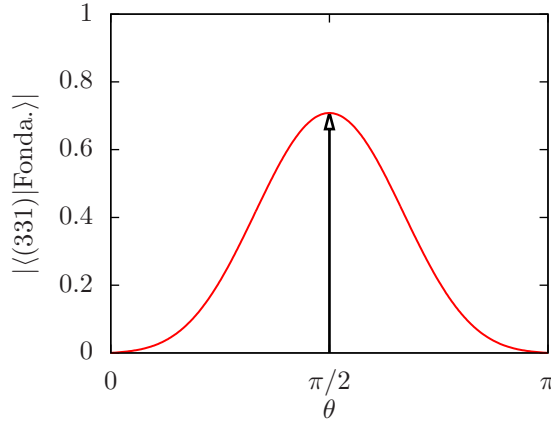


FIGURE 4.5 Recouvrement de (331) avec l'état fondamental du puits large pour $N = 10$ électrons (obtenu par diagonalisation exacte sur la sphère) en fonction de l'angle de rotation dans l'espace de pseudospin. Le champ magnétique qui spécifie la longueur magnétique vaut $B = 14,2$ T et le puits a pour largeur $w = 9l_B$ dans cet exemple représentatif. L'angle de rotation optimal est trouvé à $\pi/2$, il correspond à la situation dans laquelle les deux composantes de l'état de Halperin sont les états de bicouche effective.

des références [PMM⁺09, PPacDS10] qui consiste à exprimer l'état de Halperin dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ pour étudier le puits large.

Notons enfin que l'angle de rotation θ de l'état peut également être vu comme un paramètre variationnel dans une optimisation. Alors que les symétries du puits large non-biaisé (*i.e.* avec une symétrie $z \mapsto -z$) nous imposent $\theta = \frac{\pi}{2}$, on verra dans le chapitre 5 que ce n'est plus le cas pour un puits avec un biais, et θ devient alors un vrai paramètre variationnel.

4.2 Cristaux électroniques dans le puits large

Avant d'étudier les phases liquides à $\nu = 1/2$ nous discuterons dans cette section les différentes phases cristallines auxquelles on peut s'attendre. Pour déterminer l'énergie des états cristallins qui sont en compétition avec les états liquides dans le puits large on a recours à l'approximation de Hartree-Fock présentée dans la section 2.4.1 du chapitre 2. L'approximation de Hartree-Fock nécessite la connaissance du potentiel effectif dans l'espace de Fourier, qui s'écrit

$$v_{\text{eff.}}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(q) = \frac{2\pi}{q} \iint \varphi_{\sigma_1}^*(z) \varphi_{\sigma_2}^*(z') \varphi_{\sigma_3}(z) \varphi_{\sigma_4}(z') e^{-q|z-z'|} dz dz', \quad (4.17)$$

d'après l'identité

$$\iint \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} d\mathbf{r} = \frac{2\pi}{q} e^{-q|z|}. \quad (4.18)$$

Le potentiel effectif ne dépend que de la norme de q et pas de son orientation, *i.e.* $v(\mathbf{q}) = v(\|\mathbf{q}\|)$, car l'anisotropie de l'interaction dans l'espace de pseudospin n'engendre pas d'anisotropie dans le plan xy .

Notons que des expressions analytiques peuvent être obtenues pour tous les termes (4.17). J'ai utilisé le logiciel Mathematica[®] pour les connaître.

4.2.1 Cristaux monocomposantes

Trois familles d'états monocomposantes sont pertinentes pour notre étude du puits large. La première famille est composée des états qui ne peuplent que la plus basse sous-bande. Dans celle-ci seul le terme d'interaction

$$v^{\uparrow\uparrow\uparrow}(q) = \frac{2\pi}{q} \times \frac{3q^5 w^5 + 20\pi^2 q^3 w^3 - 32\pi^4 (1 - qw - e^{-qw})}{q^2 w^2 (q^2 w^2 + 4\pi^2)^2} \times e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (4.19)$$

a une valeur moyenne non nulle. Dans le langage du pseudospin ce terme d'interaction concerne les états propres de S_z de valeur propre $-1/2$. On remarque que

$$v^{\uparrow\uparrow\uparrow}(q) \xrightarrow{w \rightarrow 0} \frac{2\pi}{q} e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (4.20)$$

et l'on retrouve donc bien l'interaction de Coulomb projetée dans le plus bas NL dans la limite d'un puits infiniment fin.

La seconde famille de cristaux de Wigner que je considère est plus rarement considérée dans la littérature, elle est constituée des états qui dépeuplent complètement la plus basse sous-bande au profit de la première sous-bande excitée. Ce type d'état ne peut être favorisé que lorsque le gap de sous-bande est faible, suffisamment faible pour pouvoir être compensé par le gain en énergie d'interaction offert par la première sous-bande excitée. Le seul terme d'interaction de valeur moyenne non-nulle dans ces états est

$$v^{\uparrow\downarrow\downarrow}(q) = \frac{2\pi}{q} \times \frac{3q^5 w^5 + 80\pi^2 q^2 w^3 - 512\pi^4 (1 - qw - e^{-qw})}{q^2 w^2 (q^2 w^2 + 16\pi^2)^2} \times e^{-\frac{q^2}{2}}. \quad (4.21)$$

Enfin je prendrai également en compte les cristaux de la troisième sous-bande, afin de tester la validité de la restriction aux deux plus-basses sous-bandes. Si les cristaux de la troisième sous-bande ont une énergie plus importante que les autres, alors la troisième sous-bande peut être négligée dans la quête des états fondamentaux du système. L'interaction dans cette sous-bande s'écrit

$$v^{(3)}(q) = \frac{2\pi}{q} \times \frac{3(q^5 w^5 + 60\pi^2 q^3 w^3 - 864\pi^4 (1 - qw - e^{-qw}))}{q^2 w^2 (q^2 w^2 + 36\pi^2)^2} \times e^{-\frac{q^2}{2}}. \quad (4.22)$$

Pour les trois états monocomposantes évoqués tous les électrons sont dans l'une des trois plus basses sous-bandes, et les calculs du chapitre 2 sur l'énergie de cristaux de Wigner peuvent être reproduits à l'identique en remplaçant l'interaction de Coulomb par l'interaction effective (4.19) dans la plus basse sous-bande, (4.21) dans la première sous-bande excitée, ou (4.22) dans la troisième sous-bande. Explicitement, dans la sous-bande σ et dans l'approximation de Hartree-Fock le potentiel d'interaction devient

$$V^\sigma = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_{\text{HF}}^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(q) \langle \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \quad (4.23)$$

où le potentiel de Hartree-Fock est donné par (voir section 2.4.1)

$$v_{\text{HF}}^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(q) = v_{\text{eff}}^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(q) (1 - \delta_{q,0}) - \int_0^\infty \frac{p}{2\pi} v_{\text{eff}}^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(p) e^{-\frac{p^2}{2}} J_0(pq) dp, \quad (4.24)$$

et les densités projetées

$$\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle = N e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_{\mathbf{Q} \in \text{RR}} \delta^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{Q}), \quad (4.25)$$

où la somme s'effectue sur le réseau réciproque du réseau cristallin considéré. L'énergie de cohésion s'écrit alors

$$E_{\text{coh.}} = \frac{v}{4\pi} \sum_{\mathbf{Q} \in \text{RR}} v_{\text{HF}}^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(Q) e^{-Q^2}. \quad (4.26)$$

Les énergies ainsi obtenues sont tracées sur la figure 4.6 pour les quatre réseaux bidimensionnels particuliers (rhombique, rectangulaire, carré et triangulaire) et dans les trois plus basses sous-bandes. J'ai vérifié sur plusieurs exemples que le réseau le plus général (oblique) n'est jamais stabilisé, et le cristal de plus basse énergie a systématiquement un des quatre réseaux particuliers. Je tiens à souligner un détail subtil ici. Autant que les énergies tracées sur la figure 4.7 permettent de comparer les différents cristaux peuplant la même sous-bande, ces énergies ne permettent pas, pour le moment, de comparer des cristaux dans différentes sous-bandes et ainsi obtenir le diagramme de phase. Comme je le discuterai plus en détail à la fin de cette section, ceci est dû à l'énergie de référence qui dépend, à ce stade, elle de la population des sous-bandes. J'y proposerai alors une énergie de référence commune.

Dans les trois plus basses sous-bandes à $\nu = 1/2$ le cristal de plus basse énergie est un cristal rectangulaire. Ce n'est pas surprenant, car à demi-remplissage des NLs on sait que les phases anisotropes telles que la phase de rubans sont favorisées [FKS96, MC96]. Le réseau rectangulaire est défini par un paramètre de dilatation α présenté dans la section 2.4.1. Par rapport au réseau carré de même densité, dont le paramètre de maille est $R_0 = 1/\sqrt{n}$, la longueur du réseau rectangulaire est αR_0 et la largeur R_0/α (voir figure 2.4). Aux paramètres de dilatation α importants ($1,9 < \alpha < 2,8$) tels que ceux que l'on trouve par minimisation de l'énergie E_{coh} (figure 4.7), le cristal de Wigner rectangulaire peut être vu comme un cristal de rubans agrémenté de corrélations à l'intérieur des rubans. H. A. Fertig et ses collaborateurs ont montré [Fer99, YFC00, CF00] que le cristal de rubans est instable vis-à-vis de modulations de la densité dans la direction des rubans. Le cristal de Wigner rectangulaire est analogue à ce cristal de rubans avec des fluctuations de densité, et on comprend donc pourquoi le cristal de Wigner monocomposante de plus basse énergie à $\nu = 1/2$ est un cristal rectangulaire. Le profil de densité du cristal rectangulaire (figure 4.8) pour $\alpha = 1,9$ montre d'ailleurs une structure de rubans pour les paramètres de dilatation ($1,9 < \alpha < 2,8$) qui minimisent l'énergie du cristal. La différence avec le cristal de rubans (voir la figure 2.10) tient aux corrélations entre les électrons d'un même ruban. Ces corrélations réduisent l'énergie par rapport au cristal de ruban. Par exemple, dans un puits infiniment fin à $\nu = 1/2$ l'énergie des rubans est donnée par l'équation (2.127) du chapitre 2 ; la minimisation de cette énergie par rapport au pas du réseau donne un paramètre de maille $\lambda = 4,09$ et une énergie

$$E_{\text{rubans}}(\nu = \frac{1}{2}) = -0.432751. \quad (4.27)$$

L'énergie du cristal rectangulaire est plus faible, elle vaut

$$E_{\text{rec.}}(\nu = \frac{1}{2}) = -0.444447. \quad (4.28)$$

Ces résultats sont en accord avec ceux de la référence [EDK⁺06], dans laquelle il est montré que le cristal de Wigner anisotrope a une énergie plus basse encore que celle du cristal de rubans, autour du demi-remplissage du troisième NL¹ Je trouve ici que cette affirmation est également vraie dans le plus bas NL.

4.2.2 Cristaux de bicouche effective

À cause des interactions, les électrons ne sont pas contraints à être dans une seule sous-bande. En adoptant l'état $|+\rangle$ (resp. $|-\rangle$) un électron est localisé à gauche (resp. droite) du potentiel de confinement. Si la moitié des électrons sont dans l'état $|+\rangle$ et l'autre moitié dans l'état $|-\rangle$ une bicouche effective est formée. Dans la bicouche effective les termes d'interaction de valeur moyenne non-nulle sont les termes intra-couche

$$\nu^{++++}(q) = \nu^{----}(q) \quad (4.29)$$

et les termes inter-couches

$$\nu^{+-+-}(q) = \nu^{-+ -+}(q). \quad (4.30)$$

1. Une étude analogue dans le graphène amène les mêmes conclusions [ZJ07]. Notons cependant que ces résultats sont mis en doute par l'étude par numérique de la référence [FW08], dont les auteurs ont obtenu le facteur de structure statique à $\nu = 9/2$ par diagonalisation exacte et par le groupe de renormalisation de la matrice densité (DMRG en anglais).

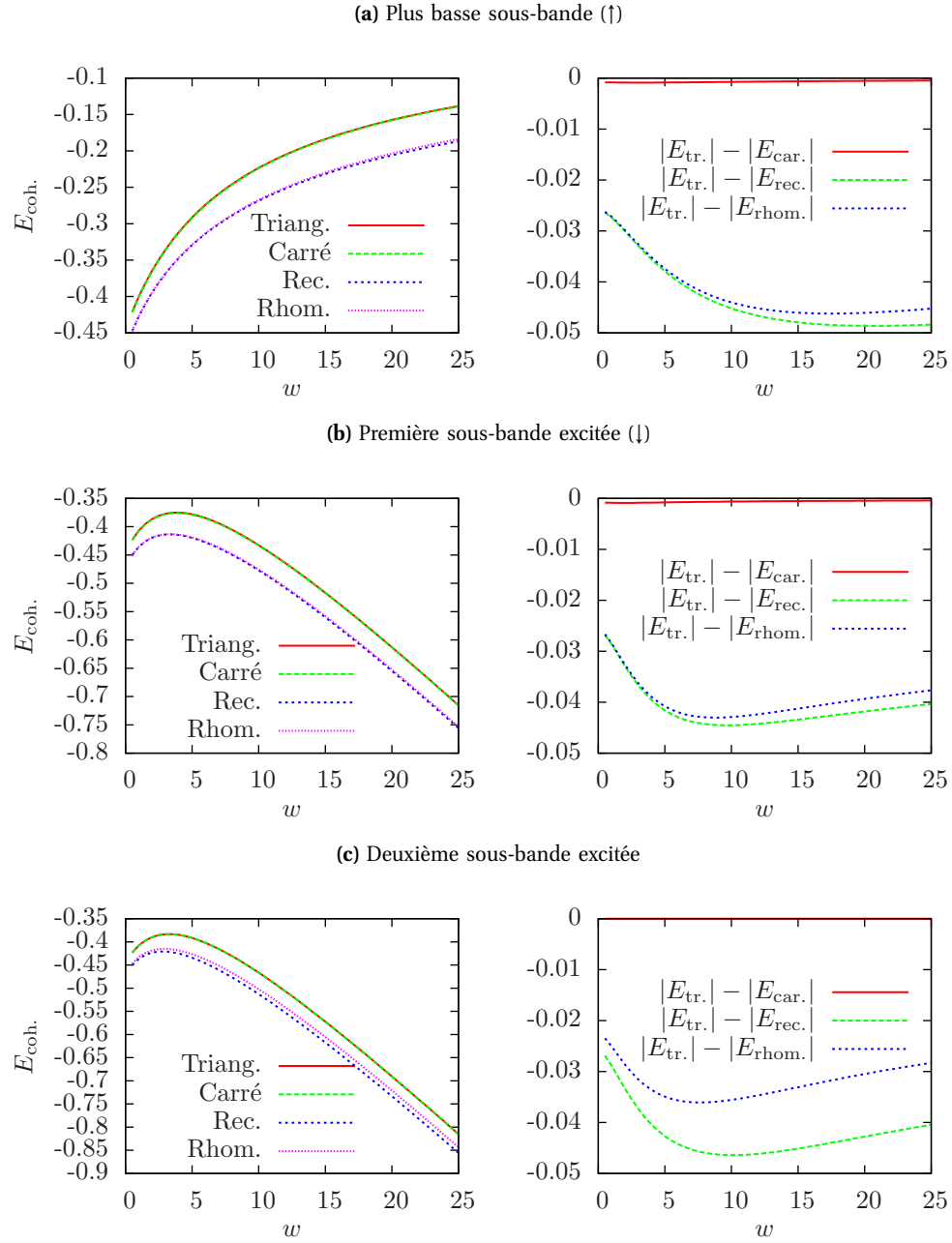


FIGURE 4.6 Energies des cristaux de Wigner monocomposantes à $\nu = 1/2$ dans le puits large, dans les trois plus basses sous-bandes. Dans les trois cas le cristal rectangulaire a l'énergie la plus basse; les paramètres de dilatation correspondants sont tracés sur la figure 4.7.

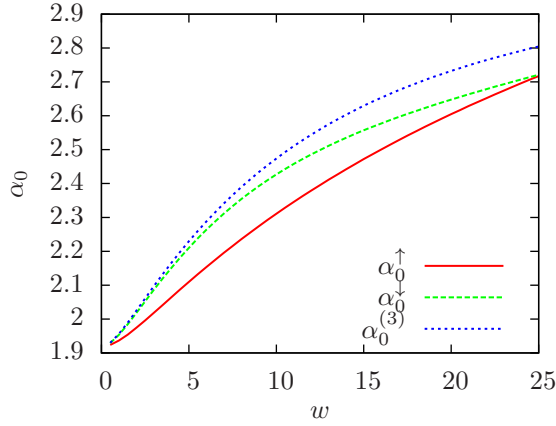


FIGURE 4.7 Valeurs optimales α_0 des paramètres de dilatation des cristaux rectangulaires dans les trois plus basses sous-bandes. La valeur optimale α_0 est déterminée par minimisation de l'énergie du système. L'anisotropie de la maille élémentaire des cristaux croît avec la largeur du puits. Ceci s'explique par la réduction de la partie courte portée de l'interaction effective à grande largeur, qui autorise un rapprochement plus grand des électrons dans la direction « comprimée » du réseau rectangulaire.

Leur expression est obtenue en considérant la forme générale de l'interaction entre couches effectives ($\alpha = \pm$ est l'indice de couche)

$$\nu^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) = \frac{2\pi}{q} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz' \varphi_{\alpha_1}(z) \varphi_{\alpha_2}(z') \varphi_{\alpha_3}(z) \varphi_{\alpha_4}(z') e^{-q|z-z'|} \quad (4.31)$$

en termes des états de bicouche effective

$$\varphi_{\pm}(z) = \frac{\varphi_{\uparrow}(z) \pm \varphi_{\downarrow}(z)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{w}} \left[\cos\left(\pi \frac{z}{w}\right) \pm \sin\left(2\pi \frac{z}{w}\right) \right]. \quad (4.32)$$

Pour calculer les énergies des cristaux de Wigner on écrit le hamiltonien dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. En généralisant le hamiltonien d'interaction (2.9) au cas où les électrons ont un degré de liberté supplémentaire $|\pm\rangle$ on obtient

$$V = \frac{1}{2A} \sum_{\{\alpha_i\}} \sum_{\mathbf{q}} \nu_n^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) \bar{\rho}_{\alpha_1 \alpha_3}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_{\alpha_2 \alpha_4}(\mathbf{q}). \quad (4.33)$$

L'énergie d'interaction déterminée à partir de ce terme est infinie à cause du terme $q=0$ qui diverge. Il est donc nécessaire de retrancher une énergie de régularisation $E_{\text{reg.}}$ – qui sera précisée dans la suite – afin d'obtenir une énergie finie.

Le hamiltonien d'interaction est complété du terme de sous-bande,

$$H_{\text{s.b.}} = -\Delta \bar{S}_z(\mathbf{q}=\mathbf{0}) \quad (4.34)$$

qui s'écrit

$$\Delta \bar{S}_x(\mathbf{q}=\mathbf{0}) = \frac{\Delta}{2} [\bar{\rho}_{+-}(\mathbf{0}) + \bar{\rho}_{-+}(\mathbf{0})] \quad (4.35)$$

dans la base $|\pm\rangle$. Le hamiltonien complet dans la base $|\pm\rangle$ de la bicouche effective est donc finalement

$$H_{\text{bic.eff.}} = \frac{1}{2A} \sum_{\{\alpha_i\}} \sum_{\mathbf{q}} \nu_n^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) \bar{\rho}_{\alpha_1 \alpha_3}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_{\alpha_2 \alpha_4}(\mathbf{q}) - E_{\text{reg.}} + \frac{\Delta}{2} [\bar{\rho}_{+-}(\mathbf{0}) + \bar{\rho}_{-+}(\mathbf{0})]. \quad (4.36)$$

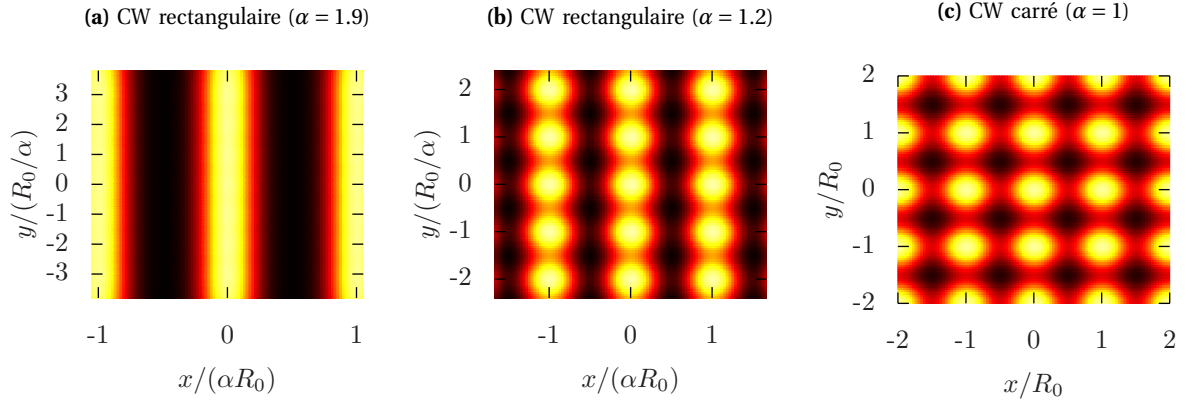


FIGURE 4.8 Profil de densité du cristal de Wigner rectangulaire de paramètre de dilatation $\alpha = 1.9$ (gauche). Cette valeur donne le cristal de Wigner de plus basse énergie à $\nu = 1/2$ dans la limite d'un puits infiniment étroit (voir figure 4.7). Le profil de densité d'un cristal de Wigner rectangulaire moins anisotrope ($\alpha = 1.2$) est montré au milieu, et celui d'un cristal de Wigner carré est montré à droite, à titre de comparaison. Les régions de forte densité sont caractérisées par des couleurs plus claires.

Dans l'approximation de Hartree-Fock, on obtient l'énergie associée à chaque terme du hamiltonien *via* la correspondance

$$v^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) \bar{\rho}_{\alpha_1 \alpha_3}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_{\alpha_2 \alpha_4}(\mathbf{q}) \xrightarrow{\text{HF}} v_H^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) \langle \bar{\rho}_{\alpha_1 \alpha_3}(-\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{\alpha_2 \alpha_4}(-\mathbf{q}) \rangle - v_F^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) \langle \bar{\rho}_{\alpha_1 \alpha_4}(-\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{\alpha_2 \alpha_3}(\mathbf{q}) \rangle, \quad (4.37)$$

avec l'expression suivante du terme direct

$$v_H^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) = v^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) \quad (4.38)$$

et du terme d'échange

$$v_F^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(q) = 2\pi \sum_{\mathbf{p}} v^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(p) e^{i\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}} \longrightarrow 2\pi \int_0^\infty \frac{p}{2\pi} v^{\alpha_1 \dots \alpha_4}(p) J_0(pq) dp, \quad (4.39)$$

où le produit vectoriel bidimensionnel est défini par $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = p_x q_y - p_y q_x$.

On obtient ainsi l'énergie de cohésion dans l'approximation de Hartree-Fock

$$E_{\text{coh.}} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ v_{\text{HF}}^{++++}(q) |\langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle|^2 + v_{\text{HF}}^{----}(q) |\langle \bar{\rho}_{--}(\mathbf{q}) \rangle|^2 + 2 [v_{\text{H}}^{+-+-}(q) - v_{\text{F}}^{+--+}(q)] \langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{--}(\mathbf{q}) \rangle \right. \\ \left. + 2 [v_{\text{H}}^{+--+}(q) - v_{\text{F}}^{+-+-}(q)] |\langle \bar{\rho}_{+-}(\mathbf{q}) \rangle|^2 + 4 v_{\text{HF}}^{++--}(q) \langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{+-}(\mathbf{q}) \rangle + 4 v_{\text{HF}}^{--++}(q) \langle \bar{\rho}_{--}(\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{+-}(\mathbf{q}) \rangle \right\} \\ + \Delta \langle \bar{\rho}_{+-}(\mathbf{0}) \rangle \quad (4.40)$$

Dans un cristal de Wigner alterné les nœuds du réseau de la couche + se placent dans les interstices du réseau de la couche -, on a alors $\langle \bar{\rho}_{+-}(\mathbf{q}) \rangle \simeq 0$ (voir section 3.1) et l'énergie de Hartree-Fock prend la forme

$$E_{\text{HF}} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ v_{\text{HF}}^{++++}(q) |\langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle|^2 + v_{\text{HF}}^{----}(q) |\langle \bar{\rho}_{--}(\mathbf{q}) \rangle|^2 + 2 [v_{\text{H}}^{+-+-}(q) - v_{\text{F}}^{+--+}(q)] \langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle \langle \bar{\rho}_{--}(\mathbf{q}) \rangle \right\} \\ = \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ v_{\text{HF}}^{++++}(q) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) [v_{\text{H}}^{+-+-}(q) - v_{\text{F}}^{+--+}(q)] \right\} |\langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle|^2 ; \quad (4.41)$$

le passage de la première à la deuxième ligne utilise le fait que les réseaux des couches + et - sont identiques, à une translation \mathbf{a} près, et on a donc $\langle \bar{\rho}_{++}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \bar{\rho}_{--}(\mathbf{q}) \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}$.

L'énergie de cohésion (4.41) des cristaux alternés dans la bicouche effective est tracée sur la figure 4.9 pour les quatre réseaux bidimensionnels particuliers. On remarque en premier lieu que pour les réseaux

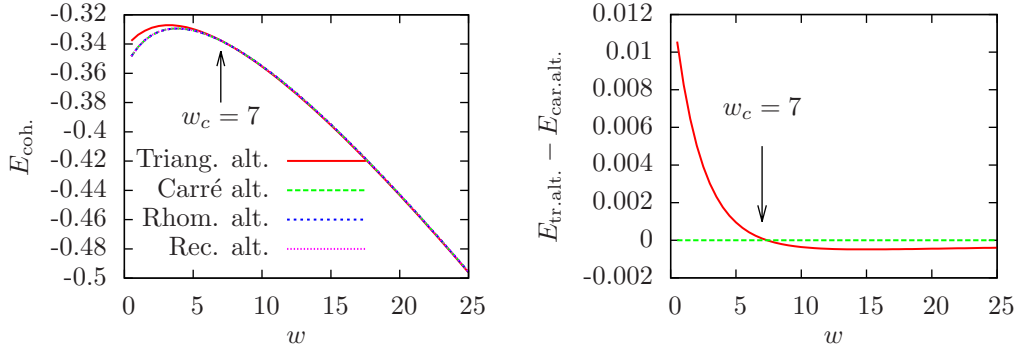


FIGURE 4.9 Énergie des cristaux alternés dans la bicouche effective à $\nu = 1/2$ (gauche), et énergie relative des cristaux triangulaires et carré alternés (droite). Les réseaux rectangulaire et rhombique alternés optimaux sont confondus avec le réseau carré, qui donne le cristal de plus basse énergie pour $w \leq 7$; au-delà le cristal de bicouche effective de plus basse énergie a un réseau triangulaire alterné.

rhombiques alternés et rectangulaires alternés la minimisation de l'énergie produit le réseau carré alterné. La compétition des phases cristallines alternées dans le puits large est ainsi réduite à un duel entre le cristal carré alterné, qui l'emporte aux faibles largeurs $w \leq 7l_B$, et le cristal triangulaire alterné qui est préféré pour $w > 7l_B$.

La différence entre la bicouche effective présentée dans cette section et la bicouche réelle du chapitre 2 s'exprime à travers la forme de l'interaction effective, ainsi qu'à travers la présence du terme ν_F^{+--+} qui est nul dans la bicouche, à cause de la symétrie $U(1)$ du potentiel d'interaction. Dans le puits large cette symétrie est absente et les processus de diffusion à double retournement de spin sont donc autorisés, d'où la pertinence du terme d'interaction ν^{+--+} .

Référence des énergies

Dans la section précédente j'ai introduit une énergie de régularisation $E_{\text{reg.}}$ que je retranche à l'énergie d'interaction afin d'obtenir une quantité finie. Dans le cas de couches de largeur négligeable, il suffit de se placer dans le cadre du modèle du jellium – dans lequel on retranche simplement le terme d'interaction à $q = 0$ – pour éviter l'écueil d'une énergie d'interaction infinie. Dans notre traitement du puits large on compare des phases qui peuplent différemment les sous-bandes, qui ont ainsi des profils de densité différents dans la direction z de confinement. Or le terme d'interaction à $q = 0$ dépend de la sous-bande peuplée, autrement dit du pseudospin de l'état que l'on considère. Dès lors, si l'on enlevait simplement le terme à $q = 0$ de l'énergie d'interaction on retrancherait une énergie qui dépend du pseudospin, et la référence d'énergie ne serait pas commune à tous les états considérés.

Pour éviter cet artefact je prends donc en compte le terme d'interaction à $q = 0$ et je retranche l'énergie de régularisation, que je choisis arbitrairement comme étant l'énergie d'interaction homogène d'un liquide

électronique dans la plus basse sous-bande, soit

$$E_{\text{reg.}} = -\frac{1}{2N} v^{\uparrow\uparrow\uparrow}(q=0) = -\frac{1}{2N} \iint \mathbf{dr} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz' \frac{\varphi_{\uparrow}^*(z) \varphi_{\uparrow}^*(z') \varphi_{\uparrow}(z) \varphi_{\uparrow}(z')}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}. \quad (4.42)$$

À partir des énergies (4.26) des cristaux dans la première sous-bande excitée, et (4.41) des cristaux bicouche, la référence énergétique commune est obtenue en ajoutant la différence d'énergie directe homogène. Il faut donc ajouter

$$\Delta E_{\text{ref.}}^{\downarrow} = -\frac{1}{2N} \left[v^{\uparrow\uparrow\uparrow}(q=0) - v^{\downarrow\downarrow\downarrow}(q=0) \right] \quad (4.43)$$

à l'énergie des cristaux de la première sous-bande excitée, et

$$\Delta E_{\text{ref.}}^{\text{bic.}} = -\frac{1}{2N} \left\{ v^{\uparrow\uparrow\uparrow}(q=0) - \frac{1}{2} \left[v^{++++}(q=0) + v^{+-+}(q=0) \right] \right\} \quad (4.44)$$

à l'énergie des cristaux bicouche. Pour la troisième sous-bande la différence d'énergie de référence est donnée, comme pour la première sous-bande excitée, par

$$\Delta E_{\text{ref.}}^{(3)} = -\frac{1}{2N} \left[v^{\uparrow\uparrow\uparrow}(q=0) - v^{(3)}(q=0) \right]. \quad (4.45)$$

Notons que toutes ces énergies de référence évoluent linéairement avec la largeur du puits ; en effet dans les intégrales impliquées dans le calcul de ces énergies, le changement d'échelle $(\mathbf{r}, z, z') \mapsto (\mathbf{x} = \mathbf{r}/w, u = z/w, v = z'/w)$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz' \frac{\varphi_{\alpha_1}^*(z) \varphi_{\alpha_2}^*(z') \varphi_{\alpha_3}(z) \varphi_{\alpha_4}(z')}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz dz' = \\ w \int_0^\infty dx x d\theta \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dv \frac{\tilde{\varphi}_{\alpha_1}^*(u) \tilde{\varphi}_{\alpha_2}^*(v) \tilde{\varphi}_{\alpha_3}(u) \tilde{\varphi}_{\alpha_4}(v)}{\sqrt{x^2 + (u - v)^2}} du dv, \end{aligned} \quad (4.46)$$

où $\varphi(u) = \sqrt{w} \varphi(z/w)$ ne dépend pas de la largeur w . Dans l'expression (4.46) l'intégrale du membre de droite ne dépend pas de la largeur w , ainsi le terme de gauche est une fonction linéaire de w , et donc toutes les différences d'énergies homogènes évoquées précédemment le sont aussi.

Ces différences d'énergies peuvent être déterminées numériquement pour un système de taille arbitraire. En pratique au delà de $N = 10^{10}$ les variations sont de l'ordre de la précision machine ; j'ai par conséquent utilisé cette taille pour déterminer les différences d'énergie (4.43) et (4.44) en considérant que la limite thermodynamique était atteinte. Elles sont tracées sur la figure 4.10 qui dévoile la relation linéaire évoquée dans le paragraphe précédent entre la largeur du puits et ces différences d'énergie

$$\Delta E_{\text{ref.}}^{\text{bic.}} \simeq 1,384 \times 10^{-2} w, \quad \Delta E_{\text{ref.}}^{\downarrow} \simeq 2,374 \times 10^{-2} w \quad \text{et} \quad \Delta E_{\text{ref.}}^{(3)} \simeq 2,814 \times 10^{-2} w. \quad (4.47)$$

Par exemple pour un puits de largeur $w/l_B = 10$, la correction à retrancher à l'énergie de l'état (331) calculée en omettant le terme homogène à $q=0$ est de $\Delta E_{\text{ref.}}^{\text{bic.}}(w/l_B = 10) = 0,1384$. Sachant que l'énergie de l'état (331) délestée de sa partie homogène vaut $E_{(331)}(q \neq 0) = -0,2424 \pm 0,0001$, on obtient une énergie d'interaction $E_{(331)} = -0,3808 \pm 0,0001$. En comparant cette valeur à l'énergie du LFFC, qui vaut $E_{\text{LFFC}}(w/l_B = 10) = -0,2440 \pm 0,0002$, on remarque donc que l'énergie de l'état (331) est plus faible que celle du LFFC à $w/l_B = 10$ et pour un gap de sous-bande nul. Cette comparaison n'est possible qu'en utilisant la même énergie de régularisation (4.42) pour tous les états, ce qui nécessite de retrancher les énergies données par les équations (4.47) aux états qui peuplent les sous-bandes excitées.

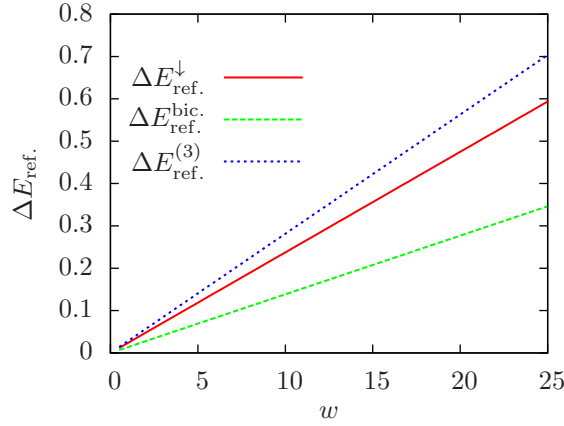


FIGURE 4.10 Différences des énergies de référence dans la puits large à $\nu = 1/2$ en fonction de la largeur w . L'énergie de référence de tous les états est l'énergie d'interaction par particule directe homogène dans la plus basse sous-bande. Sont tracées la différence de cette énergie avec l'équivalent dans la première sous-bande excitée $\Delta E_{\text{ref.}}^{\downarrow}$, dans l'état bicouche $\Delta E_{\text{ref.}}^{\text{bic.}}$, et dans la troisième sous-bande $\Delta E_{\text{ref.}}^{(3)}$. Celles-ci sont des fonctions linéaires de coefficients $2,374 \times 10^{-2}$, $1,384 \times 10^{-2}$, et $2,8 \times 10^{-2}$ respectivement.

4.2.3 Diagramme de phase des cristaux

Grâce à l'étude de la section précédente, nous connaissons désormais l'énergie de cohésion des cristaux de Wigner dans le puits large. Dans un puits de largeur donnée, celle-ci est d'autant plus faible que l'indice de sous-bande n est élevé. En contrepartie de ce gain en énergie d'interaction le peuplement des sous-bandes supérieures coûte une énergie $\delta E_n = (n^2 - 1)\hbar^2\pi^2/(2mw^2)$. En se restreignant aux deux plus basses sous-bandes cette énergie est le gap de sous-bande Δ . La promotion des électrons dans les sous-bandes excitées est donc décidée par la compétition entre le gain d'énergie d'interaction offert par les sous-bandes supérieures et le coût énergétique du gap de sous-bande.²

Le peuplement des sous-bandes excitées n'est possible que dans les puits larges, car le gap de sous-bande est alors plus faible ($\Delta \propto w^{-2}$), et la réduction de l'énergie d'interaction de la sous-bande excitée est d'autant plus importante que le puits est large, comme le montre la comparaison des graphiques 4.6a et 4.6b.

Afin d'obtenir le diagramme de phase des cristaux de Wigner dans le puits large il convient donc d'ajouter un second paramètre, le gap de sous-bande. Bien que les deux échelles d'énergie – interaction et gap de sous-bande – dépendent toutes deux de la largeur du puits, l'intensité de l'interaction dépend également de la densité et le système du puits large a donc bien deux paramètres indépendants.

Dans la limite purement théorique du gap de sous-bande nul $\Delta = 0$, il est toujours favorable de peupler les sous-bandes plus élevées à cause du gain en énergie d'interaction, tandis que l'augmentation de Δ pénalise les sous-bande excitées. J'exemplifie les arguments ci-dessus dans le diagramme de phase sur la figure 4.11, où je compare plusieurs phases cristallines à $\nu = 1/2$ dans le plus bas NL. À gauche, j'ai tracé le

2. Pour rappel, le gap de sous-bande est donné ici en unités de l'énergie coulombienne typique $e^2/(4\pi\epsilon l_B)$; celui-ci est relié à la largeur en nanomètres par

$$\Delta = \frac{40}{\sqrt{B} \left(\frac{w[nm]}{10} \right)^2} \quad \text{en unités de} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon l_B} \right]. \quad (4.48)$$

diagramme de phase en termes de paramètres w et Δ , pour des raisons d'illustration. À droite je montre les mêmes phases en fonction de la largeur w et de la densité n , paramètres plus adaptés aux expériences. Bien sûr, dans la limite des gaps de sous-bande très faibles il faudrait prendre en compte les sous-bandes supérieures aux deux plus basses pour obtenir le diagramme de phase complet. Néanmoins cette limite correspond à des puits extrêmement larges ($w \gtrsim 25$) qui n'ont pas été étudiés jusqu'alors et que je ne considérerai pas.

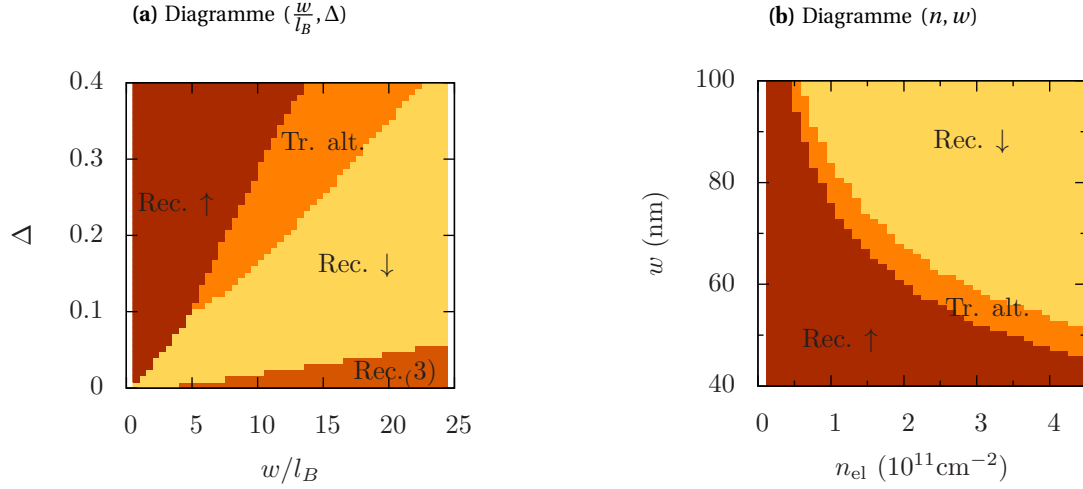


FIGURE 4.11 Diagramme de phase des cristaux de Wigner dans le puits large $\nu = 1/2$. « Rec. ↑ » désigne le cristal de Wigner rectangulaire dans la plus basse sous-bande, « Tr. alt. » signifie « triangulaire alterné » et « Rec. ↓ » réfère au cristal de Wigner rectangulaire qui peuple uniquement la première sous-bande excitée. « Rec. (3) » dénomme le cristal rectangulaire dans la troisième sous-bande du potentiel de confinement; celui-ci a l'énergie la plus basse uniquement lorsque le gap de sous-bande est très faible par rapport à l'énergie d'interaction.

On trouve quatre phases pour les gammes de paramètres considérées. À faible largeur et pour les biais importants, seule la plus basse sous-bande est pertinente et on trouve le cristal rectangulaire monocomposante correspondant. Lorsque la largeur augmente il est de plus en plus favorable de peupler les sous-bandes excitées, du point de vue des interactions. À cela s'oppose le coût en énergie de sous-bande Δ qui pénalise l'occupation des sous-bandes excitées. Ce compromis permet de stabiliser un cristal triangulaire alterné de bicouche effective – avec des électrons peuplant les deux plus basses sous-bandes – aux largeurs intermédiaires $w \sim 10l_B$, à moins que le gap de sous-bande ne soit suffisamment faible, auquel cas il devient même favorable de dépeupler complètement la plus basse sous-bande. Dans ce cas le cristal de plus basse énergie est un cristal rectangulaire dans lequel tous les électrons sont dans la première sous-bande excitée. Aux très faibles gap de sous-bande on voit apparaître des phases qui peuplent des sous-bandes élevées du puits, à cause du gain notable en énergie d'interaction qui n'est contrebalancé que par un coût très faible en énergie de sous-bande. Cependant les gammes de paramètres expérimentalement pertinentes, visibles sur les axes du diagramme 4.11b, montrent que pour stabiliser des cristaux qui impliquent les sous-bandes supérieures aux deux plus basses il faut aller vers des densités ou des largeurs de puits qui n'ont pas été atteintes jusqu'alors. Cette observation justifie *a posteriori* l'approximation qui consiste à ne garder que les deux plus basses sous-bandes du puits large, car les sous-bandes supérieures ne sont pas pertinentes dans les gammes de paramètres expérimentales.

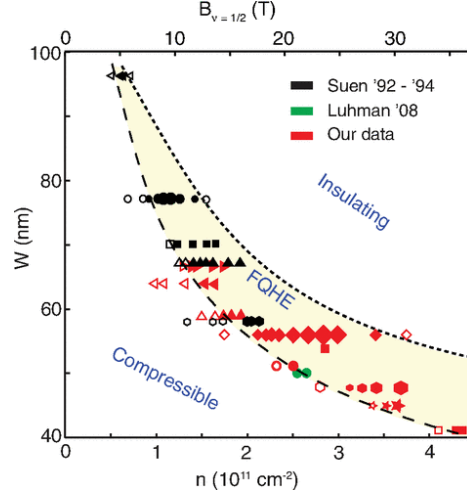


FIGURE 4.12 Diagramme de phase expérimental du puits large à $\nu = 1/2$ issu de [SLS⁺13]. Suen '92 et '94 désigne les mesures des références [SES⁺92] et [SMY⁺94] respectivement, et Luhmann '08 les résultats de la référence [LPT⁺08]. Les symboles pleins indiquent l'observation de l'EHQF, et les symboles creux son absence. La taille des symboles donnent une estimation de la « robustesse » de l'état de Hall quantique ; elle est estimée qualitativement à partir de la taille du gap, de la largeur du plateau et de la profondeur du creux dans la résistance longitudinale.

4.3 Diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$

Les énergies des cristaux de Wigner dans le puits large à $\nu = 1/2$ ont été établies dans la section précédente, en prenant en compte les deux plus basses sous-bandes. À ce facteur de remplissage le diagramme de phase du puits large a été établi en rassemblant de nombreuses données expérimentales ; il est donné par la figure 6 de la référence [SLS⁺13] que je présente sur la figure 4.12. Il montre trois phases aux comportements différents, une phase métallique dans les puits fins, une phase d'EHQF aux largeurs intermédiaires, et une phase isolante dans les puits très larges. Les transitions entre ces phases sont décidées par la largeur du puits et par la densité. La présence de trois phases indique que le diagramme de phase comporte *au moins* trois états fondamentaux différents. Alors que de nombreuses études expérimentales [WPR⁺90, WRWP93, MSK94] et théoriques [RR94, HLR93, PMABJ98] indiquent que l'état métallique pour $w \rightarrow 0$ est un LFFC compressible, il y a deux candidats naturels pour l'EHQF à $\nu = 1/2$: un état pfaffien à une composante et un état (331) à deux composantes. Les calculs de diagonalisation exacte semblent favoriser l'état (331) [PMM⁺09, PJDS08]. L'état isolant pour de grandes valeurs de w est certainement le moins étudié.

Dans cette section j'établis le diagramme de phase à $\nu = 1/2$ en fonction de la largeur du puits w et de la densité n , en comparant les énergies de différents états. Alors que mes calculs corroborent l'identification de l'état compressible au LFFC et celle de (331) pour l'état d'EHQF et reproduisent de manière quantitative la ligne de transition entre ces phases, ils dévoilent un état original pour la phase isolante, à savoir un cristal de Wigner rectangulaire qui n'occupe que la première sous-bande excitée.

4.3.1 Énergie des liquides corrélés

En plus du liquide de Fermi de fermions composites (LFFC) dans lequel tous les électrons sont dans la plus basse sous-bande et de l'état (331) qui forme une bicouche effective, je considérerai également l'état

pfaffien. En effet, bien que celui-ci ne soit en principe pertinent que dans le second NL [PMABJ98], il a été montré qu'il peut être favorisé par la largeur finie du potentiel de confinement [PJDS08] car le potentiel de confinement abaisse la répulsion de courte portée de manière similaire à l'interaction effective dans $n = 1$. On sait que dans la bicouche réelle l'état fondamental à grande distance est composé de deux LFFCs indépendants à $\nu = 1/4$ dans chacune des couches (voir chapitre 3); pour cette raison on peut s'attendre à ce que les deux LFFCs indépendants, qui occupent chacun une des couches effectives, entrent en compétition avec l'état (331) dans le puits large également. Enfin je prendrai en compte l'état formé de deux états pfaffiens à $\nu = 1/4$ indépendants, chacun dans une des couches effectives.

En résumé je considère cinq états d'EHQF. Deux sont monocomposantes, le LFFC et le pfaffien, et peuvent peupler la plus basse sous-bande ou la première sous-bande excitée. Les trois autres états forment une bicouche effective, ce sont l'état (331), les deux pfaffiens indépendants (2Pf) et les deux liquides de Fermi de fermions composites indépendants (2LFFCs).

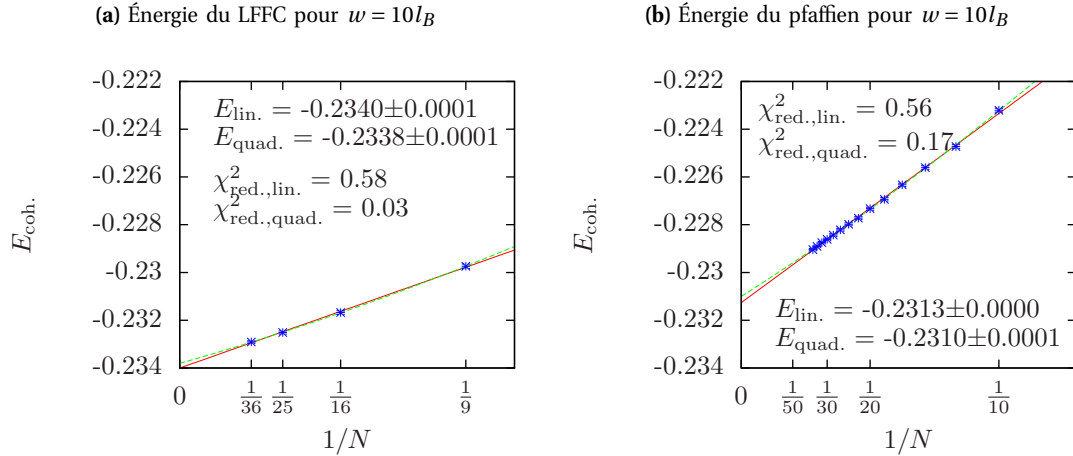


FIGURE 4.13 Exemples d'extrapolations quadratiques et linéaires des énergies de cohésion obtenues par calcul Monte-Carlo, avec les coefficients χ^2 correspondants. L'erreur Monte-Carlo est donnée par la différence entre l'extrapolation linéaire et celle quadratique. Ici j'ai présenté les énergies du liquide de Fermi de fermions composite (gauche) et de l'état pfaffien (droite) dans un puits de largeurs $w = 10l_B$, à $\nu = 1/2$. Les tailles permises pour les deux états ne sont pas les mêmes, ce sont les carrés d'entiers pour le LFFC (pour obtenir des couches pleines), et les entiers paires pour le pfaffien. Les barres d'erreurs pour chaque taille sont petites car un grand nombre d'itérations (10^6) a été utilisé dans l'algorithme de Metropolis, et les énergies sont moyennées sur dix exécutions indépendantes du programme. Notons que les extrapolations linéaires et quadratiques sont quasiment identiques ici, et il en va de même dans tous les cas qui sont exposés dans ce manuscrit.

Les énergies de ces états sont obtenues de la manière suivante.

- Pour plusieurs tailles de système – définies par le nombre de particules N – on calcule l'énergie d'interaction par méthode Monte-Carlo, en utilisant l'algorithme de Metropolis présenté dans l'annexe C.
- On lui retranche l'énergie homogène d'interaction d'un liquide non-corrélé, puis on divise par le nombre de particules pour obtenir l'énergie de cohésion $E_{\text{coh.}}$.
- On trace $E_{\text{coh.}}$ en fonction de $1/N$ et on réalise une interpolation polynomiale d'ordre deux. L'énergie de cohésion à la limite thermodynamique est la valeur en zéro de la fonction d'interpolation. L'ordre de l'interpolation polynomiale est justifié par la quasi-linéarité des énergies de cohésion en fonction de $1/N$. Le terme quadratique ajoute une faible correction.
- Dans chaque cas on réalise une extrapolation linéaire et une extrapolation polynomiale d'ordre 2 pour obtenir l'énergie de cohésion à la limite thermodynamique. L'erreur sur cette énergie est donnée

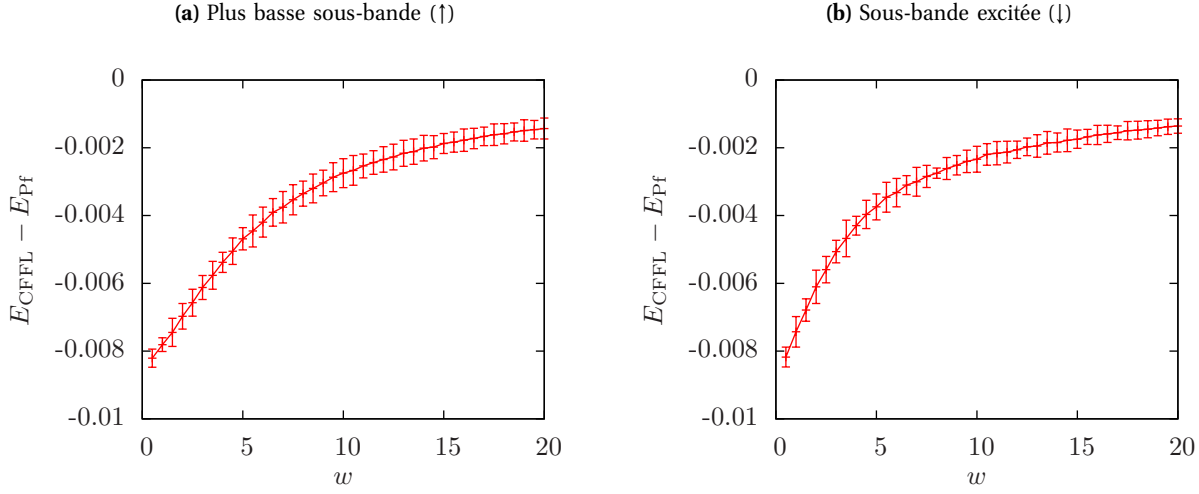


FIGURE 4.14 Différence d'énergie du pfaffien et du liquide de Fermi de fermions composite (LFFC) dans les deux plus basses sous-bandes. Le LFFC a une énergie plus basse pour toutes les valeurs explorées, et la différence d'énergie est bien supérieure à l'erreur Monte-Carlo totale. J'ignorerai par conséquent le pfaffien dans l'étude du puits large symétrique à $\nu = 1/2$ par la suite.

par la différence entre les valeurs issues de ces deux interpolations.

- La référence énergétique commune déjà mentionnée dans la section 4.2.2 est obtenue en ajoutant les différences d'énergies homogènes 4.44 pour les états de bicouche effective et 4.43 pour les états de la première sous-bande excitée.

Deux exemples de cette extrapolation de l'énergie à la limite thermodynamique sont donnés sur la figure 4.13 pour l'état pfaffien et le LFFC, dans le puits large à $\nu = 1/2$ pour $w = 10l_B$. Dans cet exemple, l'état pfaffien a une énergie plus grande que le LFFC, et il en va de même pour toutes les largeurs $w \leq 25l_B$.

Dans un puits infiniment étroit l'énergie du LFFC est plus basse que celle du pfaffien [PMABJ98]. J'ai vérifié que cela reste vrai pour un puits de largeur finie, au moins pour $w \leq 25l_B$. La différence d'énergie entre les deux états est tracée sur la figure 4.14a, l'énergie du LFFC est bel et bien inférieure à celle du pfaffien et l'écart en énergie est supérieur à l'erreur totale. Dans la mesure où l'on conserve les deux plus basses sous-bandes du puits large, il convient de considérer les états à une composante dans la première sous-bande excitée. Ces états peuvent s'avérer pertinents dans les puits très larges. La compétition entre le pfaffien et le LFFC dans la sous-bande excitée est tranchée par la figure 4.14b qui penche également en faveur du LFFC. On peut donc omettre le pfaffien par la suite dans l'étude du puits large symétrique dans le plus bas NL, car celui-ci n'est jamais favorisé par rapport au LFFC.

Une autre famille d'états est à prendre en compte, formées des états de bicouche effective. Comme dans la bicouche réelle, je considérerai les états de bicouches indépendantes, à savoir le pfaffien et le LFFC à $\nu = 1/4$ dans chaque couche ; je prendrai également en compte l'état (331), dans lequel les deux composantes sont faiblement corrélées. Le tracé des énergies relatives de ces trois états (figure 4.15) montre que l'état (331) a l'énergie la plus basse pour $w \leq 15l_B$, les deux LFFC sont stabilisés pour $w > 17l_B$, et entre ces deux valeurs les incertitudes sur l'énergie des deux états se superposent et on ne peut donc pas conclure. Il est naturel que les corrélations inter-couches favorisent l'état (331) aux faibles largeurs, tandis qu'elles le pénalisent aux grands w , pour lesquels deux LFFC indépendants sont stabilisés. Encore une fois l'état pfaffien n'apparaît pas pertinent dans l'étude du puits large symétrique à $\nu = 1/2$.

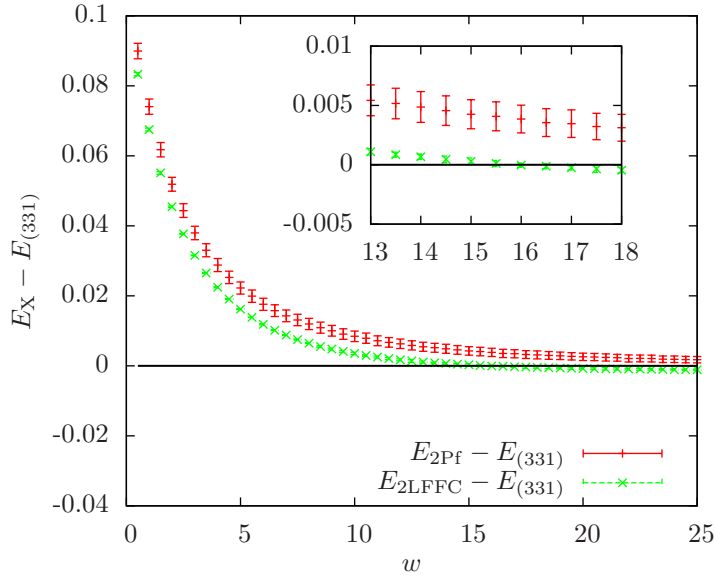


FIGURE 4.15 Différences d'énergie des états liquides dans la bicouche effective du puits large à $\nu = 1/2$. L'état (331) à l'énergie la plus basse pour $w \leq 15l_B$, les deux LFFC indépendants (2LFFC) sont stabilisés pour $w > 17l_B$, et entre ces deux valeurs les incertitudes sur l'énergie des deux états se superposent et on ne peut donc pas conclure. Les deux pfaffiens indépendants à $\nu = 1/4$ dans chaque couche ne sont pas stabilisés. L'encart est un agrandissement autour de la transition entre (331) et les 2LFFC.

Parmi les états liquides considérés ne s'avèrent pertinents que les LFFC (dans la plus basse sous-bande, dans la première sous-bande excitée, et dans la configuration bicouche) et l'état (331). Le pfaffien est éliminé par les comparaisons énergétiques, quelque soit son occupation des sous-bandes.

4.3.2 Diagramme de phase complet

En combinant les résultats des calculs Hartree-Fock sur les cristaux de Wigner (section 4.2) et ceux des calculs Monte-Carlo pour les états de Hall quantiques (section 4.3.1), on obtient le diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$ donné sur la figure 4.16a. Trois régions différentes apparaissent sur ce diagramme de phase, qui correspondent chacune à un état de plus basse énergie donné. Dans les puits de faibles largeurs le LFFC a l'énergie la plus basse et on retrouve donc la hiérarchie du puits infiniment fin. Dans les puits très larges et pour des gaps de sous-bande modérés la phase de plus basse énergie est un cristal de Wigner rectangulaire peuplant uniquement la première sous-bande excitée. Enfin, dans un régime intermédiaire c'est l'état (331) qui a l'énergie la plus basse parmi tous les états que j'ai considérés.

Dans les expériences qui nous intéressent, le gap de sous-bande dépend de la largeur. Les deux paramètres qui sont fixés indépendamment sont la largeur du puits quantique (exprimée en nanomètres), qui est déterminée lors de la fabrication de l'échantillon, et la densité électronique qui dépend de la quantité de silicium dopants introduits dans les couches d'AlGaAs. La densité peut de plus être modulée durant les expériences par l'application de deux tensions de grilles symétriques aux extrémités du dispositif. Ces tensions de grille permettent de contrôler le nombre d'électrons issus du dopage par le silicium qui passent dans le puits quantique de GaAs (voir figure 1.1b). Le diagramme de phase correspondant est donné par la figure 4.17, ses paramètres sont la largeur et la densité électronique. La figure à gauche montre le diagramme de phase

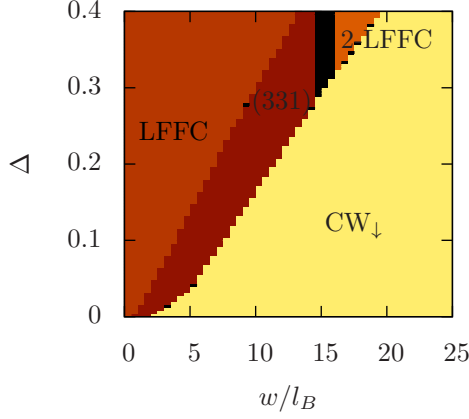
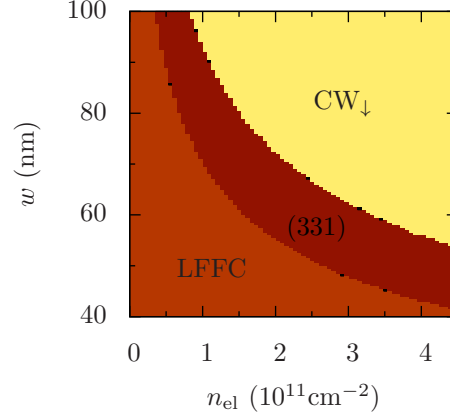
(a) Diagramme de phase en fonction de w/l_B et du gap de sous-bande Δ (b) Diagramme de phase en fonction de la largeur w [nm] et de la densité électronique n_{el} .

FIGURE 4.16 (a) Diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$ en fonction de la largeur du puits en unités de la longueur magnétique w/l_B et du gap de sous-bande Δ . Parmi tous ceux considérés, trois états apparaissent comme états fondamentaux. À faible largeur le liquide de Fermi de fermions composites (LFFC) a l'énergie la plus basse, sauf si le gap de sous-bande est inférieur à $\approx 0.04 \times w$. Dans les puits larges et tant que le gap de sous-bande n'est pas trop important ($\Delta \lesssim 0,02 \times (w - 5)$) l'état fondamental est un cristal de Wigner rectangulaire (CW) qui ne peuple que la première sous-bande excitée. Enfin il existe un régime intermédiaire dans lequel l'état (331) est stabilisé. Les régions noires indiquent un recouvrement des barres d'erreurs sur les énergies, qui empêche de déterminer l'état de plus basse énergie. Enfin l'état 2LFFC est l'état fondamental dans une région du diagramme de phase qui n'est pas exploré expérimentalement. (b) Diagramme de phase du puits large à $\nu = 1/2$ en fonction de la largeur exprimée en nanomètres et de la densité électronique.

issu de mes calculs variationnels, en comparaison avec le diagramme de phase expérimental (figure 4.12), que j'ai inséré à droite.

La diagramme de phase théorique que j'obtiens est en bon accord avec le diagramme de phase expérimental (figure 4.17). Notons tout d'abord que cette concordance corrobore l'image habituellement avancée dans la littérature relative à l'EHQF dans les puits larges à $\nu = 1/2$. Selon celle-ci, dans le régime mono-composante l'état fondamental est un liquide de Fermi de fermions composite (LFFC), tandis que dans les puits relativement larges ($w \sim 10$) l'EHQF observé est bien décrit par un état de Halperin (331) à deux composantes. C'est bien le résultat que je retrouve ici par calcul variationnel.

Au-delà de la reproduction du diagramme de phase expérimental et de la corroboration de la nature des phases liquides, mes calculs permettent l'identification de la phase isolante observée dans les puits très larges [SSS92, SMY⁺94, SLS⁺13]. D'après les calculs présentés dans ce chapitre, cette phase isolante serait un cristal de Wigner rectangulaire qui peuple uniquement la première sous-bande excitée. Cet état atypique explique la dépendance de la transition entre le régime de l'EHQF et la phase isolante vis à vis du gap de sous-bande. En effet cette dépendance indique que les deux états en compétition peuplent les sous-bandes différemment, et exclut ainsi un cristal de Wigner bicouche de la compétition avec l'état (331), car les deux états peuplent les sous-bandes de la même manière. Notons que la phase isolante pourrait également être due à la localisation individuelle des électrons. Cependant l'accord quantitatif entre le diagramme de phase expérimental et le diagramme théorique de la figure 4.17 laisse supposer que la phase isolante a été identifiée avec succès. L'image que je propose pourrait être corroborée expérimentalement par des mesures de transport sous irradiation micro-onde. Avec ce type de mesure, la présence d'un cristal électronique est

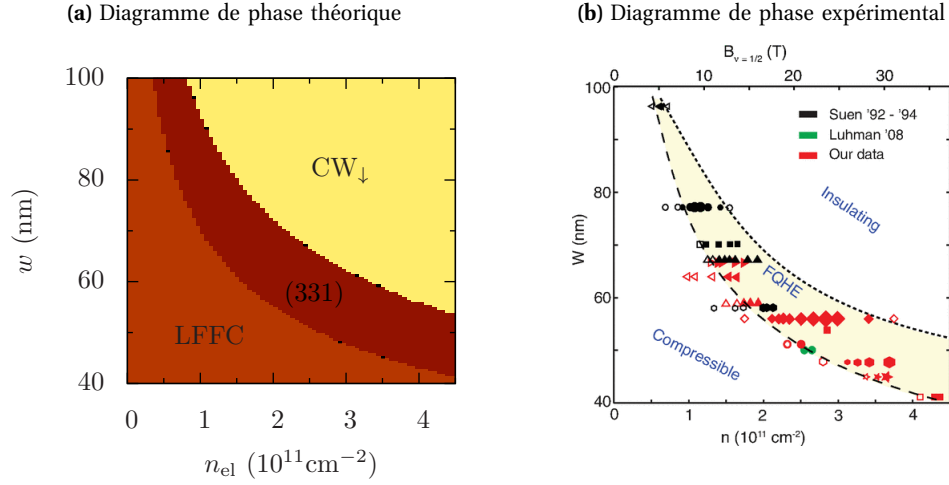


FIGURE 4.17 (a) Diagramme de phase théorique de la figure 4.16b. Celui-ci peut être directement comparé aux expériences correspondantes de la littérature, notamment avec le diagramme de phase expérimental montré sur figure (b) de droite, issu de la référence [SLS⁺13].

trahie par l'excitation des modes d'accrochage du cristal au potentiel de désordre (voir le chapitre 9 de la référence [SP08]).

Une approximation importante a été faite dans toute cette étude. On a supposé le potentiel de confinement parfaitement symétrique. En réalité la symétrie n'est jamais parfaite, et il est par conséquent utile de déterminer le rôle de l'asymétrie du confinement sur la physique de l'EHQF. De plus, une étude expérimentale [SGCS09] a montré qu'il est possible d'induire l'EHQF en créant une asymétrie dans le potentiel de confinement ; l'asymétrie qui apparaît alors plus intéressante qu'un simple artefact expérimental. Pour ces raisons j'étudie le puits quantique asymétrique ou « biaisé » dans le prochain chapitre.

Avant cela, de la même manière que dans le chapitre précédent j'avais considéré la bicouche dans les deux plus bas NLs, je complète cette étude dans la section suivante, en la poursuivant dans le second NL.

4.4 Puits large symétrique et second niveau de Landau

À demi-remplissage, on a vu dans le chapitre 3 que dans la bicouche, les diagrammes de phase des deux plus bas NLs diffèrent seulement dans le régime monocomposante des petites distance ; alors que le liquide de Fermi de fermions composites est stabilisé dans le plus bas NL, le pfaffien le supplante dans le second NL. Dans la section précédente, il a été montré que le diagramme de phase du puits large est quantitativement *et qualitativement* différent de celui de la bicouche, à $\nu = 1/2$. Pour cette raison on ne peut étendre les résultats de la bicouche au puits large directement, et pour établir le diagramme de phase du puits large à $\nu = 5/2$ une nouvelle étude est nécessaire. Pour ce faire j'ai à nouveau recours à l'interaction effective gaussienne présentée dans la section 3.3. Il eût été optimal d'utiliser l'interaction effective polynomiale de la section précédente, mais l'obtention des coefficients des différents monômes nécessite de connaître l'expression général des pseudopotentiels associés à un monôme du type r^k , sur la sphère. N'ayant pas une telle expression dans le second NL, j'ai opté pour l'interaction effective polynomiale qui, bien qu'elle ne reproduise pas exactement les pseudopotentiels de l'interaction originale, les approche avec une précision de l'ordre de 0,1%.

Hormis l'interaction effective qui est différente, la méthode pour obtenir le diagramme de phase du puits large à $\nu = 5/2$ est la même qu'à $\nu = 1/2$, cependant on s'attend à ce que les phases pertinentes soient différentes, notamment parce qu'on sait que dans la limite du puits fin c'est l'état pfaffien qui est favorisé, alors que dans le plus bas NL c'était le LFFC. J'ai vérifié que l'état pfaffien a une énergie plus basse que le LFFC et les états cristallins pour toutes les valeurs de la largeur w dans la plus basse sous-bande. À l'inverse, dans la première sous-bande excitée c'est le cristal de Wigner rectangulaire qui domine, comme dans le plus bas NL. Entre ces deux régimes extrêmes, la comparaison de l'énergie des phases de bicouche effective (figure 4.18) montre que l'état formé de deux pfaffiens décorrélés qui occupent chacun une des couches effectives domine pour $w \geq 4l_B$; aux largeurs plus petites le système est monocomposante en pratique, comme nous le verrons par la suite, et l'état (331) n'intervient donc jamais, comme un état pfaffien à une composante y a la plus basse énergie.

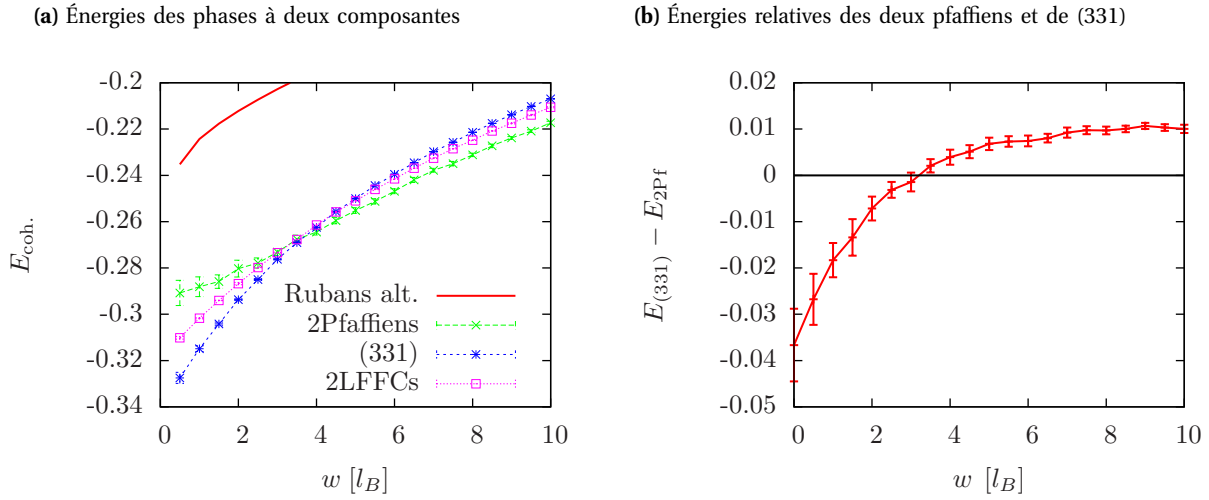


FIGURE 4.18 Comparaison de l'énergie des phases à deux composantes, à $\nu = 5/2$ dans le puits large. Les deux pfaffiens dominent pour $w \geq 4l_B$; aux largeurs plus petites le système est monocomposante en pratique, et l'état (331) n'intervient donc jamais, comme un état pfaffien à une composante y a la plus basse énergie.

La tracé du diagramme de phase complet est présenté sur la figure 4.19, dans la même gamme de paramètres que dans le plus bas NL.

On remarque que l'état pfaffien à une composante domine l'essentiel du diagramme de phase pour les gammes de paramètres pertinentes expérimentalement. Ceci est dû au fait que dans le second niveau de Landau les longueurs magnétiques sont plus grandes pour les même valeur du champ magnétique, ainsi la largeur du puits en unité de la longueur magnétique est réduite à des valeurs plus faibles et le régime du puits très large est difficilement atteignable. Seulement aux densités très importantes et dans les puits très larges, une bicouche effective de pfaffiens indépendants émerge. Dans les puits plus larges encore le cristal de Wigner rectangulaire qui ne peuple que la sous-bande excitée est stabilisé, comme dans le plus bas NL. Je rappelle que ce dernier état est apparenté au cristal de ruban, qui est connu pour son apparition à demi-remplissage des NLs élevés [Fog02]. Ici, tout comme dans le plus bas NL, cet état peut être favorisé par une grande largeur du potentiel de confinement, qui atténue la partie à courte portée du potentiel d'interaction et avantage ainsi les cristaux appariés tels que le cristal rectangulaire, qui rapproche les électrons dans la direction « comprimée ».

De la même manière que celui du plus bas NL, le diagramme de phase de la figure 4.19 permet de tester la pertinence des états modèles utilisés par comparaison avec les résultats expérimentaux. Néanmoins je

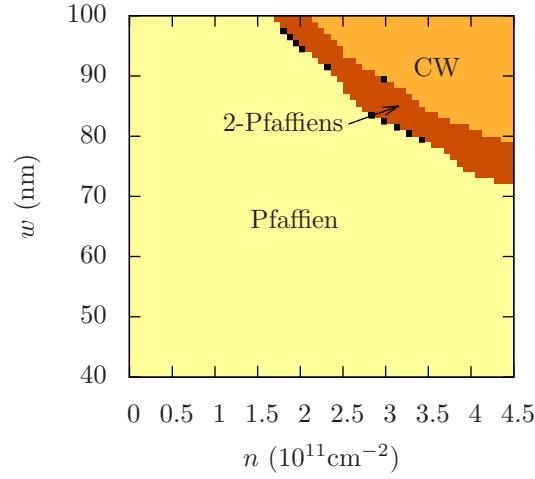


FIGURE 4.19 Diagramme de phase du puits large à $\nu = 5/2$. L'état pfaffien à une composante domine l'essentiel du diagramme de phase pour les gammes paramètres pertinentes expérimentalement. Ceci est dû au fait que dans le second niveau de Landau les longueurs magnétiques sont plus grandes pour les mêmes valeurs du champ magnétique, ainsi la largeur du puits en unité de la longueur magnétique est réduite à des valeurs plus faibles et le régime du puits très large est difficilement atteignable. Seulement aux densités très importantes et dans les puits très larges, une bicouche effective de pfaffiens indépendants émerge, et dans les puits encore plus larges le cristal de Wigner rectangulaire dans la sous-bande excitée est stabilisé, comme dans le plus bas NL.

n'ai pas connaissance d'un travail établissant le diagramme de phase expérimental du puits large à $\nu = 5/2$. De plus, alors que dans le plus bas NL les transitions qui ressortent de ce chapitre ont lieu entre des états de nature différente, à $\nu = 5/2$ la première transition a lieu entre deux états d'effet Hall quantique fractionnaire, le pfaffien monocomposante et les deux pfaffiens décorrelés, et l'observation expérimental de cette transition nécessiterait des mesures supplémentaires à celles de la tension de Hall. En revanche, la transition entre les deux pfaffiens décorrelés et le cristal de Wigner rectangulaire de la sous-bande excitée peut être observé expérimentalement à travers la disparition de l'effet Hall quantique fractionnaire au profit d'une phase isolante. Le cas échéant, si la transition a lieu aux densités et largeur de puits prévues par le diagramme 4.19, l'identification de la phase isolante au cristal de wigner rectangulaire serait vraisemblable.

Chapitre 5

Effet Hall quantique fractionnaire dans un puits quantique asymétrique

Dans les expériences sur l'effet Hall quantique fractionnaire menées dans les puits quantiques, la densité électronique du système bidimensionnel d'électrons est ajustée *in situ* par l'application d'une tension de grille externe. Une deuxième grille est utilisée dans le but de contrôler le degré de symétrie du potentiel de confinement (figure 5.1), celui-ci est généralement symétrisé au maximum car cela permet d'optimiser la mobilité électronique.

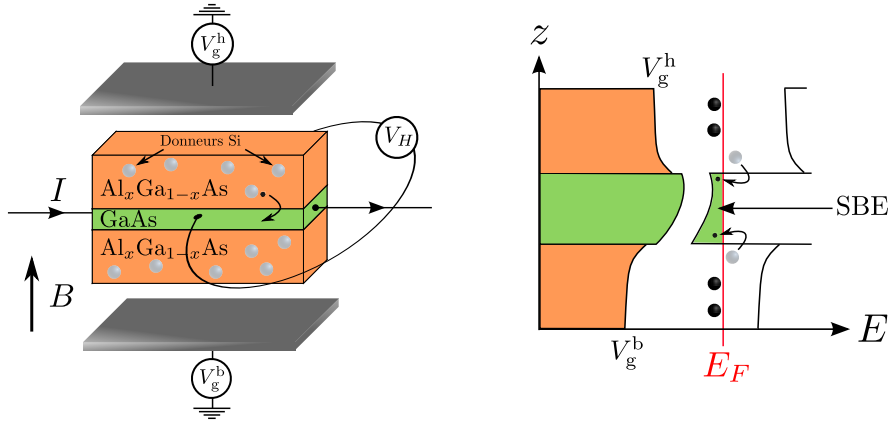


FIGURE 5.1 Dispositif expérimental du puits large (gauche), et bandes associées (droite). L'utilisation de deux tensions de grilles en haut V_g^h et en bas V_g^b du dispositif permet de contrôler le degré de symétrie du potentiel de confinement ressenti par le système bidimensionnel d'électrons (SBE).

Dans un puits symétrique on peut stabiliser des états à deux composantes qui forment une bicouche effective, par exemple l'état de Halperin (331) à $\nu = 1/2$, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4. Dans ce chapitre j'introduirai une asymétrie dans le potentiel de confinement, modélisée par un biais linéaire (voir section 1.1.3) par rapport au puits carré infini. Ce modèle du puits large biaisé me permettra d'étudier la stabilité de l'état (331) en présence d'une asymétrie dans le potentiel de confinement. Cet état constitue l'exemple canonique des états de Hall multicomposantes qui peuvent être stabilisés dans un puits large.

Expérimentalement, contrôler le biais du potentiel de confinement permet de sonder le caractère mono- ou multi-composante des états de Hall quantiques, comme l'ont fait J. Shabani et ses collaborateurs pour l'effet Hall quantique à $\nu = 1/2$ [SGS09, SGCS09]. L'idée est la suivante. En partant d'un puits quantique symétrique, si l'on augmente le biais on accroît le gap de sous-bande, rendant ainsi progressivement les sous-bandes excitées inaccessibles. On passe donc continûment d'un régime multi-composante dans la situation symétrique à un régime mono-composante lorsque le biais est important. Si l'état de Hall quantique survit à l'augmentation du biais, alors c'est un état mono-composante. Les observations qui ressortent de cette étude à $\nu = 1/2$ sont surprenantes. Dans l'échantillon de la référence [SGCS09], l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 1/2$ n'est pas observé lorsque le puits est symétrique, mais seulement lorsque le potentiel de confinement est rendu asymétrique. Le premier objectif du travail présenté dans ce chapitre est de déterminer la nature de l'état de Hall quantique qui est stabilisé à $\nu = 1/2$ dans la référence [SGCS09], et qui nécessite un biais non-nul. Plus généralement, je me propose dans ce chapitre d'établir le diagramme de phase du puits quantique biaisé à demi-remplissage dans les deux plus bas niveaux de Landau. L'étude correspondante a également été publiée dans la référence [TGR14].

Dans un deuxième temps, je m'intéresserai aux états de Halperin asymétriques dans le puits biaisé. Comme dans la bicouche du chapitre 3, il est naturel de supposer qu'un biais non-nul du potentiel de confinement peut permettre la stabilisation d'états multicomposantes asymétriques. Notamment, l'effet Hall quantique fractionnaire observé à $\nu = 4/11$ [PST⁺03] déjà évoqué dans le chapitre 3 peut résulter de la stabilisation d'un état de Halperin (532) par une asymétrie résiduelle dans le potentiel de confinement. J'explorerai cette possibilité avec ce modèle de puits biaisé, dans lequel le potentiel de confinement est représenté par un puits carré infini avec une pente linéaire. Cette étude permettra également de discuter la validité de la modélisation du puits large (biaisé) par une bicouche (biaisée), par comparaison avec les travaux présentés dans la section 3.4.

La structure du présent chapitre est la suivante. Dans une première section je reviens sur les fonctions de Halperin « tournées » déjà introduites dans la section 4.1.2, pour montrer qu'en traitant l'angle de rotation comme un paramètre variationnel on peut optimiser le recouvrement des états modèles avec l'état fondamental du puits quantique biaisé. Pour cela je détermine l'état du fondamental par diagonalisation numérique exacte du potentiel d'interaction effectif, et je calcule son recouvrement avec les états modèles pertinents en fonction de l'angle de rotation. Dans la deuxième section je présente une description théorique des expériences des références [SGS09, SGCS09] dans lesquelles l'influence du biais sur l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 1/2$ est étudié. Je m'intéresse à l'évolution de l'état fondamental du système bidimensionnel d'électrons dans le puits quantique biaisé, en fonction de la largeur du puits et de son biais, et je montre que l'état (331) peut être stabilisé à des biais non-nuls à condition d'opérer la rotation adéquate dans l'espace de pseudospin. Dans une troisième section je propose une explication qualitative pour la valeur de l'angle optimal, qui repose sur une analogie avec la bicouche présentée dans le chapitre 3. Enfin dans la quatrième section je prolonge l'étude sur l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 4/11$, entamée dans la section 3.4 à travers un modèle de bicouche.

5.1 Asymétrie du potentiel de confinement et rotation des états modèles dans l'espace de pseudospin

5.1.1 Les sous-bandes du puits quantique biaisé

Le puits large biaisé a été présenté dans la section 1.1, le potentiel de confinement correspondant

$$V(z) = \begin{cases} Vz/w & \text{si } z \in [-w/2, w/2] \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.1)$$

est schématisé sur la figure 5.2. La limite $V \rightarrow 0$ correspond au puits symétrique qui fait l'objet du chapitre 4, tandis que $V \rightarrow \infty$ produit le potentiel triangulaire schématisé sur la figure 1.4. Dans cette dernière limite le gap de sous-bande est très grand et seule la plus basse sous-bande est pertinente à basse énergie ; le système est alors monocomposante.

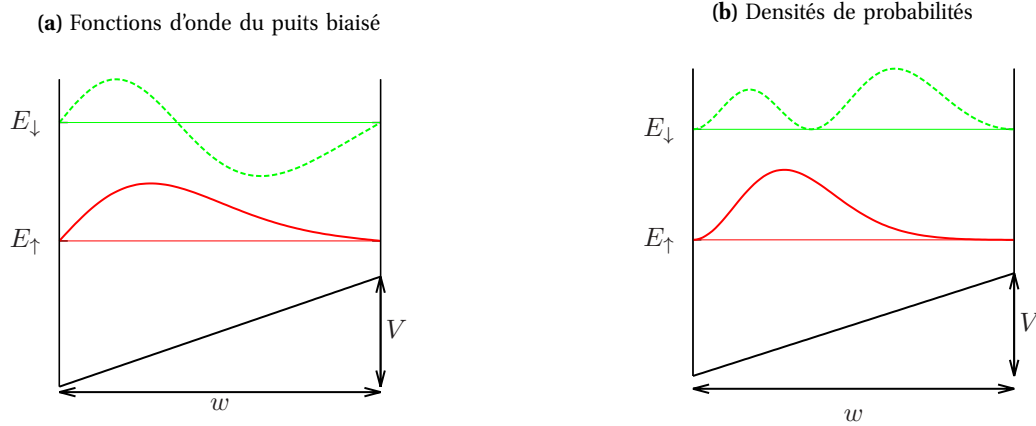


FIGURE 5.2 Les fonctions d'ondes des deux plus basses sous-bandes du puits quantique biaisé (gauche), et les densités de probabilités associées (droite). La largeur vaut $w = 10l_B$ et le biais $V = e^2/4\pi\epsilon l_B$ dans cet exemple représentatif.

Les fonctions d'ondes correspondant aux deux plus basses sous-bandes du puits quantique biaisé sont tracées sur la figure 5.2, elles ont la forme (voir équation (1.5) du chapitre 1)

$$\varphi_n(z) = \mathcal{N}_n \left\{ \text{Ai} \left[k \left(V \frac{z}{w} - E_n \right) \right] + c_n \text{Bi} \left[k \left(V \frac{z}{w} - E_n \right) \right] \right\}, \quad (5.2)$$

où Ai et Bi sont les fonctions d'Airy de première et deuxième espèce respectivement. J'ai introduit la constante $k^{-1} = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2 V^2}{2mw^2}}$, et \mathcal{N}_n est une constante de normalisation. Les coefficients c_n et les énergies E_n sont obtenus par résolution numérique des équations de conditions aux limites, $\varphi_n(0) = 0$ et $\varphi_n(w) = 0$. Ces équations ont une infinité de solutions qui constituent les différentes sous-bandes, dont on retient les deux plus basses.

Par rapport au puits symétrique, on voit sur la figure 5.2 que la plus basse sous-bande du puits biaisé est déplacée vers la gauche où le potentiel est plus faible. À l'inverse la première sous-bande excitée est plus localisée à droite, dans la région biaisée, afin de satisfaire l'orthogonalité avec les autres sous-bandes, comme les fonctions d'onde des sous-bandes à plus haute énergie (non illustrées) deviennent de plus en plus symétriques.

Le gap de sous-bande $\Delta = E_{\downarrow} - E_{\uparrow}$, tracé sur la figure 5.3b, est d'autant plus faible que le puits est large, en revanche il est accru par l'augmentation du biais. Pour connaître sa valeur dans nos « unités magnétiques » il faut spécifier la valeur de la longueur magnétique, et donc le champ magnétique.¹ J'ai choisi $B = 14,2$ T pour tracer la figure 5.3a, c'est à cette valeur du champ magnétique que l'EHQF induit par un biais a été observé dans la référence [SGCS09] ($n = 1,72 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$).

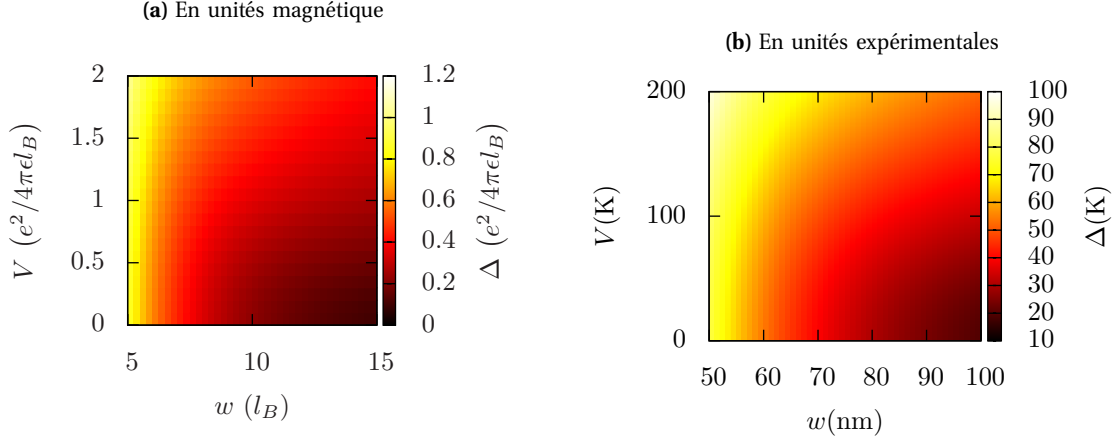


FIGURE 5.3 Gap de sous-bande $\Delta = E_{\downarrow} - E_{\uparrow}$ du puits quantique biaisé, en unités magnétiques (gauche) et en unités SI (droite) adaptées aux expériences. La traduction en unités magnétiques nécessite de spécifier la valeur du champ magnétique, j'ai choisi une valeur représentative de $B = 14,2$ T qui correspond à $\nu = 1/2$ dans la référence [SGCS09].

Comme dans le cas du puits symétrique, le hamiltonien d'interaction a l'expression (4.11) que je réécris ici

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\{m_i\}} \sum_{\{\sigma_i\}} V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4}(w, V) c_{m_1 \sigma_1}^\dagger c_{m_2 \sigma_2}^\dagger c_{m_4 \sigma_4} c_{m_3 \sigma_3} - \frac{\Delta(w, V)}{2} \sum_m (c_{m\uparrow}^\dagger c_{m\downarrow} - c_{m\downarrow}^\dagger c_{m\uparrow}), \quad (5.3)$$

où $\sigma_i = \pm$, m_i désigne le moment cinétique, et les coefficients d'interaction $V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4}$ sont obtenus à partir de l'interaction effective

$$V_{\text{eff.}}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(r) = \iint \frac{\varphi_{\sigma_1}^*(z) \varphi_{\sigma_2}^*(z') \varphi_{\sigma_3}(z) \varphi_{\sigma_4}(z')}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz dz' \quad (5.4)$$

selon la procédure décrite dans la section 4.1. Dans le hamiltonien (5.3), les coefficients d'interaction $V_{m_1 \dots m_4}^{\sigma_1 \dots \sigma_4}$ et le gap de sous-bande Δ dépendent de la largeur w et du biais V , notons que ce hamiltonien (5.3) du puits biaisé possède la même structure que son *alter ego* du puits symétrique qui correspond à la limite $V \rightarrow 0$.

5.1.2 Fonctions de Halperin tournées d'un angle arbitraire

La fonction de Halperin la plus simple que l'on peut écrire pour le puits large a pour composantes les deux plus basses sous-bandes \uparrow et \downarrow . L'état correspondant a un recouvrement faible avec l'état fondamental quelque soit la largeur du puits ($< 10\%$ pour (331)). En effet, les composantes idoines pour l'état (331) sont les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ de bicouche effective; on a vu dans la section 4.1.2 que celles-ci améliorent considérablement le recouvrement avec l'état fondamental, dans le puits large symétrique (jusque 73% pour (331) à $w = 9l_B$, au vu de la figure 4.5).

1. Un autre choix pour lequel je n'ai pas opté consiste à utiliser les unités SI, mais alors c'est l'interaction effective qui dépend explicitement du champ magnétique.

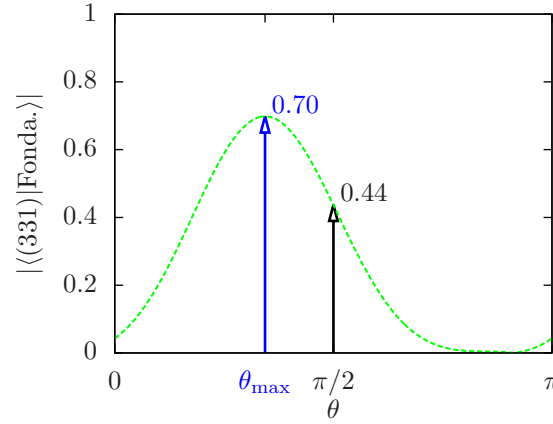


FIGURE 5.4 Recouvrement de (331) avec l'état fondamental (obtenu par diagonalisation exacte sur la sphère avec $N_B = 17$) du puits quantique biaisé à $\nu = 1/2$ pour $N = 10$ électrons en fonction de l'angle de rotation θ dans l'espace de pseudospin. Le champ magnétique qui spécifie la longueur magnétique vaut $B = 14,2$ T, le puits a pour largeur $w/l_B = 10$ et le biais vaut $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$.

Le passage des composantes $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ aux composantes $|+\rangle$ et $|-\rangle$ est réalisé par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace de pseudospin (voir figure 4.4). On a vérifié explicitement dans le chapitre 4 que le recouvrement de l'état de Halperin (331) avec l'état fondamental du puits symétrique est maximal pour $\theta = \pi/2$ (figure 4.5). En présence d'un biais la situation est différente. La figure 5.4 montre le recouvrement de l'état (331) avec l'état fondamental d'un puits de largeur $w/l_B = 10$ en présence d'un biais $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$, en fonction de θ . Le maximum de recouvrement n'est pas trouvé à $\pi/2$ (c'est-à-dire pour les composantes $|+\rangle$ et $|-\rangle$) mais à un angle intermédiaire qui vaut $\theta_{\max} = 0,34\pi$ dans cet exemple, et qui varie avec w et V .

Ainsi, alors que les composantes optimales de l'état (331) sont les combinaisons $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans le cas du puits symétrique, la combinaison des sous-bandes optimale dans le puits biaisé dépend du biais. Pour cette raison l'angle de rotation θ qui décrit cette combinaison linéaire sera traité comme un paramètre variationnel à optimiser dans la suite du chapitre. Je reviendrai sur l'interprétation de cet angle optimal dans la dernière section de ce chapitre, mais on peut déjà le comprendre qualitativement en comparant les fonctions d'ondes correspondants à la combinaison $|+\rangle$ et $|-\rangle$ des sous-bandes, avec les fonctions d'ondes données par l'angle θ_{\max} . Celles-ci sont tracées sur la figure 5.5. Sur cette figure on voit que les composantes pour lesquelles les électrons sont le plus efficacement séparés en deux couches distinctes – afin de minimiser l'interaction coulombienne – sont bien données par l'angle optimal θ_{\max} , et pas par les combinaisons $|\pm\rangle$ obtenues pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En résumé, l'angle variationnel θ de rotation de l'état de Halperin dans l'espace de pseudospin permet de trouver la bonne base à un corps, dans laquelle les sous-bandes décrivent une bicouche effective. C'est seulement lorsqu'il est défini à partir des composantes de la bicouche effective que l'état de Halperin décrit potentiellement l'état fondamental du système. Cette observation amène la question suivante : sachant que les états à deux composantes peuvent être optimisés par rotation dans l'espace de pseudospin, en est-il de même pour les états à une composante? La sous-section suivante traite cette question.

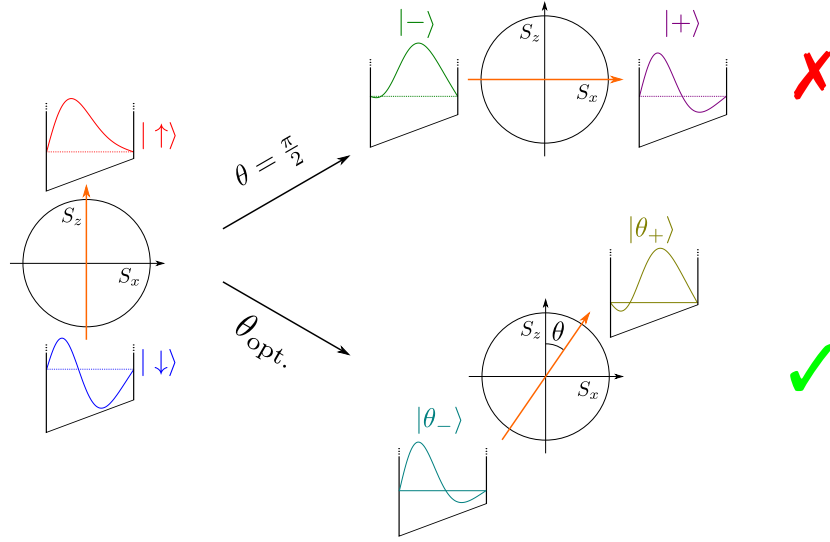


FIGURE 5.5 Rotation du pseudospin dans le puits quantique biaisé. Les sous-bandes montrées dans cet exemple correspondent à un puits de largeur $w/l_B = 10$ et un biais $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$. Pour ces valeurs l'angle de rotation qui optimise le recouvrement de l'état (331) avec l'état fondamental du système d'électrons en interaction vaut $\theta = 1,08$. On peut voir sur le schéma que cet angle produit une meilleure séparation des couches effectives $|\theta_+\rangle$ et $|\theta_-\rangle$ que l'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui est l'angle optimal dans un puits symétrique, et qui produit les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

5.1.3 Rotation des états monocomposantes dans l'espace de pseudospin

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, un état à deux composantes dans un puits large est généralement décrit par une combinaison d'angle quelconque $\theta_{\max} = \theta_{\max}(w, V)$ dépendant de la largeur w et du biais V . On peut se demander s'il en va de même des états monocomposantes.

Pour répondre à cette question j'ai tracé sur la figure 5.6 le recouvrement de l'état pfaffien (qui a bien une seule composante) avec l'état fondamental du système d'électrons dans le puits quantique biaisé. L'état fondamental est obtenu par diagonalisation numérique exacte, et j'ai choisi pour cet exemple un puits de largeur $w/l_B = 8$ et de biais $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$. Le recouvrement est maximal pour une valeur non-nulle de l'angle de rotation ($\theta_{\max} = -0,11\pi$). Par conséquent, pour les états monocomposantes également le recouvrement entre l'état modèle et l'état fondamental peut être optimisé par une rotation dans l'espace de pseudospin. Le maximum indique alors la combinaison adéquate des fonctions d'onde de sous-bandes, pour laquelle l'état modèle reproduit correctement la dépendance en z de l'état fondamental.

Pour comprendre cette propriété des états modèles monocomposantes j'ai tracé sur la figure 5.7 les fonctions d'ondes de sous-bandes pour les valeurs de paramètres de la figure 5.6, et la fonction d'onde de confinement

$$\varphi_{\theta_+}(z) = \cos(\theta_{\max}/2) \varphi_1(z) + \sin(\theta_{\max}/2) \varphi_l(z) \quad (5.5)$$

donnée par l'angle θ_{\max} qui maximise le recouvrement entre le pfaffien et l'état fondamental. On voit sur la figure de gauche que la fonction d'onde de plus basse sous-bande est asymétrique par rapport au centre du puits, du fait de la présence du biais. La fonction $\varphi_{\theta_+}(z)$, quant à elle, est symétrique. On comprend alors que l'existence d'un angle d'optimisation non nul est due au fait que l'état fondamental est symétrique dans la direction du confinement, ainsi même en présence du biais les interactions restaurent cette symétrie en contrepartie d'un coût

$$E_{s.b.} = \Delta \left(\langle S_z \rangle + \frac{1}{2} \right) = \frac{\Delta}{2} \times \sin^2 \theta \quad (5.6)$$

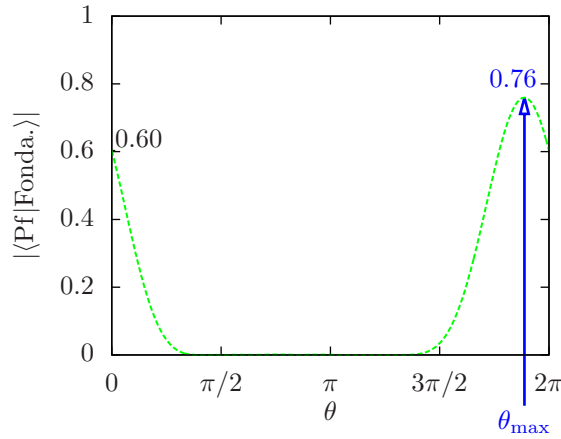


FIGURE 5.6 Recouvrement de l'état pfaffien (Pf) avec l'état fondamental (Fonda.) du puits quantique biaisé à $\nu = 1/2$ pour $N = 10$ électrons (obtenu par diagonalisation exacte sur la sphère avec $N_B = 17$) en fonction de l'angle de rotation dans l'espace de pseudospin. Le champ magnétique qui spécifie la longueur magnétique vaut $B = 14,2$ T, le puits a pour largeur $w/l_B = 8$ et le biais vaut $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$. Le recouvrement maximal n'est pas obtenu pour $\theta = 0$, qui correspond à un état pfaffien dans la sous-bande \uparrow , mais pour un angle $\theta_{\max} = -0,11\pi$ qui produit une fonction symétrique dans la direction du confinement (voir figure 5.7).

en énergie de sous-bande.

Il est important de garder à l'esprit que la rotation du pseudospin n'affecte la fonction d'onde que dans la direction du potentiel de confinement, et l'optimisation proposée dans ce chapitre consiste simplement à trouver la bonne combinaison des sous-bandes pour exprimer les états modèles. Cependant, pour étudier le rôle du potentiel de confinement dans un modèle de puits quantique asymétrique il est crucial de procéder à cette optimisation, sans quoi le recouvrement des états modèles avec l'état fondamental apparaît plus faible qu'il n'est en réalité, simplement du fait que l'état modèle n'est pas exprimé dans la bonne base du degré de liberté de sous-bande. Munis de cette méthode d'optimisation nous pouvons étudier le diagramme de phase du puits quantique biaisé. Je commence par m'intéresser à $\nu = 1/2$ dans la section suivante, car c'est à ce facteur de remplissage que l'EHQF induit par le biais a été observé par J. Shabani *et al.* [SGCS09]. Ensuite j'aborderai le problème équivalent dans le NL supérieur ($\nu = 5/2$). À ce facteur de remplissage l'EHQF est généralement décrit par l'état pfaffien (2.51) et on peut se demander comment cette description est altérée en présence d'un biais.

5.2 Diagramme de phase du puits biaisé à $\nu = 1/2$ et $\nu = 5/2$

Pour les deux facteurs de remplissages qui nous intéressent, $\nu = 1/2$ et $\nu = 5/2$, on veut déterminer les propriétés de l'état fondamental du système pour un ensemble représentatif de largeurs $5 \leq w \leq 15$ et de biais $0 \leq V \leq 2$ (en unités magnétiques), qui mettent en exergue les propriétés intéressantes du puits biaisé. Pour chaque couple de valeurs on génère l'état fondamental du hamiltonien (5.3) par la méthode de Lanczos [Lan50], puis on calcule les valeurs moyennes du pseudospin et du moment cinétique. Enfin on détermine le recouvrement avec les états modèles pertinents, en suivant la procédure d'optimisation décrite dans la section précédente.

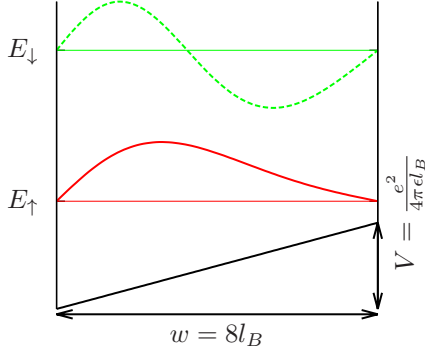
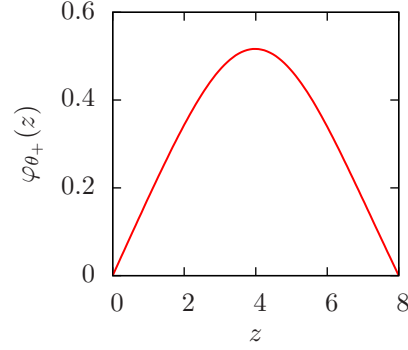
(a) F. o. de sous-bandes pour $w/l_B = 8$ et $V = 1$ (b) $\varphi_{\theta_+}(z) = \cos(\theta_{\max})\varphi_{\uparrow}(z) + \sin(\theta_{\max})\varphi_{\downarrow}(z)$ 

FIGURE 5.7 (a) Fonctions d'onde de sous-bande pour $w/l_B = 8$ et $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$, et (b) Combinaison des fonctions d'onde de sous-bande pour l'angle de rotation optimal θ_{\max} du pfaffien (voir figure 5.6). La figure de droite indique que l'angle de rotation optimal dans l'espace de pseudospin correspond à une fonction d'onde symétrique par rapport au centre du puits, formée à partir des fonctions d'onde des deux sous-bandes \uparrow et \downarrow .

Étant donné que notre hamiltonien modèle H défini par l'équation (5.3) n'est pas invariant par rotation dans l'espace de pseudospin, S^2 et généralement aussi S_z cessent d'être de bons nombres quantiques et ne peuvent être diagonalisés en même temps que H . L'espace de Hilbert dans lequel on diagonalise le hamiltonien contient alors tous les secteurs de S_z . En revanche H est invariant par rotation des degrés de liberté orbitaux et on peut donc le diagonaliser dans un secteur de L_z donné. Je choisis le secteur $L_z = 0$ car il contient tout le spectre de L^2 .

Les états modèles que je considérerai ont été présentés dans le chapitre 2, ce sont le liquide de Fermi de fermions composite (LFFC) compressible, l'état de Halperin (331) à deux composantes, l'état pfaffien (Pf) et l'état singulet de Haldane-Rezayi (HR). Je rappelle sur le tableau 5.1 les propriétés principales de ces états. Bien que les deux premiers (LFFC et (331)) soient généralement associés au plus bas NL et les deux derniers (Pf et HR) au second NL, ils sont en principe tous pertinents pour la modélisation de n'importe quel NL à moitié rempli. Je génère ici l'état de HR et l'état (331) par diagonalisation de leurs interactions modèles (voir chapitre 2), et j'obtiens l'état pfaffien récursivement par compression à partir de l'état racine [BH08, BR09, TERB11a, TERB11b]. Pour le LFFC, au lieu de générer cet état explicitement j'ai utilisé l'état fondamental de l'interaction de Coulomb pour une couche infiniment fine ($w = 0$) à $\nu = 1/2$ au shift $\delta_{\text{LFFC}} = -2$, car celui-ci a un recouvrement quasi-total ($> 99\%$) avec le LFFC [RR94] pour les tailles que l'on considère. Pour déterminer la stabilité du LFFC on calcule donc le recouvrement de l'état fondamental du hamiltonien à (w, V) avec l'état fondamental de l'interaction de Coulomb pure à $w = 0$.

Les caractéristiques de ces quatre états modèles sont rappelées dans le tableau 5.1

Les tailles de systèmes que je considère sont $N = 6, 8, 10$. Je me restreins aux valeurs paires car tous les états modèles que j'utilise ne sont définis que pour un nombre paire de particules, hormis le LFFC. Les tailles inférieures à $N = 6$ sont trop faibles, elles sont dominées par les effets de taille finie, et les systèmes avec plus de dix particules sont à la limite de l'accessible numériquement ($\dim \mathcal{H} \simeq 7,7 \times 10^8$ pour $N = 12$, $L_z = 0$ et $\delta = -2$). Les dimensions de l'espace de Hilbert sont données sur le tableau 5.2 pour les différentes tailles en fonction du shift. Alors que l'obtention de l'état fondamental pour quelques valeurs (w, V) est envisageable pour $N = 12$, le tracé du diagramme de phase complet, qui contient 400 points, requiert un temps de calcul prohibitif. Pour ne pas alourdir le manuscrit je ne montrerai que les résultats pour $N = 10$, dans la mesure où les tailles inférieures n'altèrent pas l'image obtenue pour $N = 10$.

États	Moment cinétique L_z	Polarisation	Incompressible	Shift (δ)
(331)	0	Partielle : $\langle S^2 \rangle \neq 0$, $\langle S_z \rangle = 0$	✓	-3
Pfaffien	0	Totale	✓	-3
CFFL	Dépend de N	Totale	✗	-2
HR	0	Singulet : $\langle S^2 \rangle = 0$	✗	-4

TABLE 5.1 Propriétés des états modèles considérés.

Le moment cinétique individuel maximal sur la sphère est relié au nombre de particules N et au shift δ de l'état modèle considéré par (annexe A)

$$2L_z^{\max} = N_B + 2n = \nu^{-1}N + \delta \quad (5.7)$$

où n désigne l'indice du NL ($n = 0$ pour le plus bas). Les dimensions des espaces de Hilbert à $L_z = 0$ sont donnés par le tableau 5.2 pour les tailles et les shifts qui nous concernent.

N = 6		N = 8		N = 10		N = 12	
Shift	dim(\mathcal{H})	Shift	dim(\mathcal{H})	Shift	dim(\mathcal{H})	Shift	dim(\mathcal{H})
-2	4 277	-2	214 813	-2	12 308 486	-2	766 465 127
-3	2 496	-3	123 711	-3	7 050 864	-3	437 615 929
-4	1 352	-4	67 915	-4	3 891 964	-4	242 400 700

TABLE 5.2 Dimensions des sous-espaces $L_z = 0$ pour $N = 6, 8, 10$ et 12 à demi-remplissage. La projection dans le n -ième niveau de Landau implique que la dimension est la même dans tous les niveaux de Landau, en revanche le nombre de quanta de flux correspondant varie avec l'indice du niveau de Landau sur la sphère.

5.2.1 Plus bas niveau de Landau : $\nu = 1/2$

Le plus bas NL à demi-remplissage dans le puits large symétrique a été étudié par des méthodes variationnelles dans le chapitre 4. On y a vu que l'état (331) à deux composantes est stabilisé aux largeurs intermédiaires, et sépare une phase LFFC compressible dans les puits fin et une phase cristalline isolante dans les puits très large. En première approximation on peut voir le puits biaisé comme un puits symétrique avec une largeur effective réduite par le biais. Si cette image est correcte le biais aura simplement pour effet de changer les largeurs de transition entre les différentes phases. Même si cette image peut, comme on le verra, rendre compte en partie du diagramme des phases elle fait abstraction de l'asymétrie des fonctions d'onde, qui s'avérera cruciale.

Pour la présente étude je fixe le champ magnétique à $B = 14,2$ T, car cette valeur représentative correspond à $\nu = 1/2$ dans la référence [SGCS09]. Je présenterai les mêmes calculs pour un champ magnétique différent par la suite afin de vérifier que les résultats ne dépendent pas de ce paramètre, au moins qualitativement. Je considère 400 points régulièrement repartis dans la gamme de paramètres $5l_B < w < 15l_B$ et $0 < V < 2 \times e^2/4\pi\epsilon l_B$. Le choix de ce domaine tient à sa représentativité des transitions qui nous intéressent, et il est également justifié par sa pertinence expérimentale. En effet, pour $B = 14,2$ T il correspond à une largeur $34.5 < w < 103.5$ nm et un biais $0 < V < 32.4$ meV. Cette dernière valeur ne représente pas un biais irréaliste dans la mesure où il reste bien inférieur à la profondeur du puits (~ 300 meV).

Avant de tenter une identification de l'état fondamental à partir du tracé de son recouvrement avec les états modèles, intéressons-nous à l'évolution des différents nombres quantiques qui caractérisent l'état fondamental. Le moment cinétique orbital l est tracé sur la figure 5.8 pour $N = 6, 8, 10$. Il est obtenu à partir de la valeur moyenne $\langle L^2 \rangle$ par l'identification

$$\langle L^2 \rangle = l(l+1), \quad l \geq 0. \quad (5.8)$$

Une valeur non nulle du moment cinétique implique que l'état fondamental est inhomogène, potentiellement un état de type cristal de Wigner tel que ceux rencontrés dans les chapitres précédents, ou une onde de densité de charge. Au vu de la figure 5.8, l'inhomogénéité est présente dans les puits très larges ($w > 10l_B$) et aux valeurs suffisamment faibles du biais. Néanmoins cette propriété dépend fortement de la taille du système et du shift, c'est pourquoi il est difficile de conclure sur la stabilité d'un cristal de Wigner à partir d'études de diagonalisation exacte sur la sphère, comme celles-ci ne donnent pas accès à des systèmes de suffisamment grande taille pour l'étude des phases inhomogènes. Notons cependant que les états fondamentaux inhomogènes sont plus facilement visibles sur le tore [YHR01].

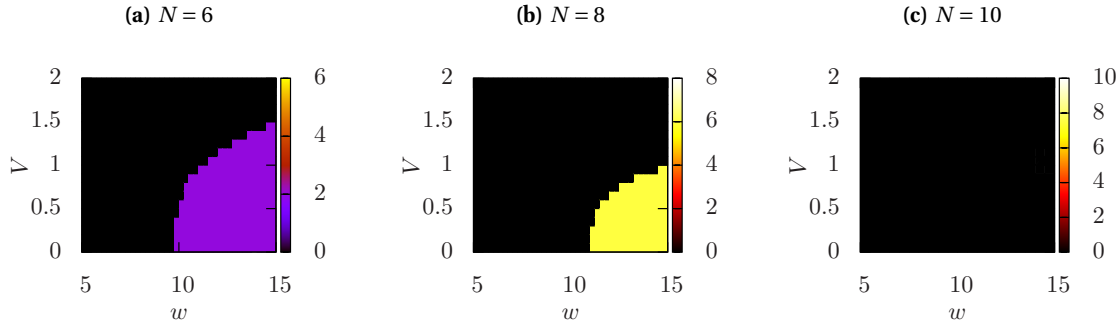


FIGURE 5.8 Moment cinétique de l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 1/2$, pour $N = 6, 8$, et 10 . Le shift vaut $\delta = -3$ ici, c'est celui du pfaffien et de l'état (331). Notons que la valeur du moment cinétique dépend fortement du shift.

Les valeurs moyennes du pseudospin \mathbf{S} , quant à elles, dépendent peu de la taille du système et je me contenterai donc de présenter les résultats pour $N = 10$, qui est la plus grande taille que j'ai considérée. Le pseudospin déduit de S^2 et la valeur moyenne de S_z dans l'état fondamental sont tracés sur la figure 5.9. Je rappelle que ces valeurs moyennes ne sont pas restreintes aux nombres demi-entiers car le pseudospin, contrairement au spin physique, ne commute pas avec le hamiltonien d'interaction.

On voit sur la figure que le système est complètement polarisé dans la direction $|\uparrow\rangle$ pour $w/l_B \lesssim 8$, autrement dit seule la plus basse sous-bande est peuplée, comme on s'y attend pour des puits de faible largeur. Pour $w/l_B > 8$ la polarisation décroît ; les électrons peuplent de plus en plus la sous-bande excitée, et sont finalement dans un état avec $\langle S_z \rangle \approx 0$ aux grandes largeurs et pour les biais modérés. Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, cette dépolarisation s'explique par la diminution de l'énergie d'interaction offerte par la sous-bande excitée, qui est due à la présence d'un nœud dans la fonction d'onde correspondante. Ce gain en énergie d'interaction est en compétition avec le gap de sous-bande qui pénalise le peuplement de la sous-bande excitée. Aux largeurs importantes le gap de sous-bande est fortement réduit et la sous-bande excitée peut ainsi être peuplée, entraînant la dépolarisation du pseudospin. Quant au biais, il n'influe pas sur la polarisation dans les puits fins, où l'état est déjà complètement polarisé même en l'absence de biais. Il n'influe que dans les puits très larges, dans lesquels l'augmentation du biais restaure la polarisation de l'état fondamental selon $|\uparrow\rangle$, dépeuplant ainsi la sous-bande excitée. Ceci est en accord avec l'image évoquée plus haut selon laquelle le biais réduit effectivement la largeur du puits. Par le biais, on s'attend alors à pouvoir stabiliser un état monocomposante, potentiellement un pfaffien ou un LFFC, dans le

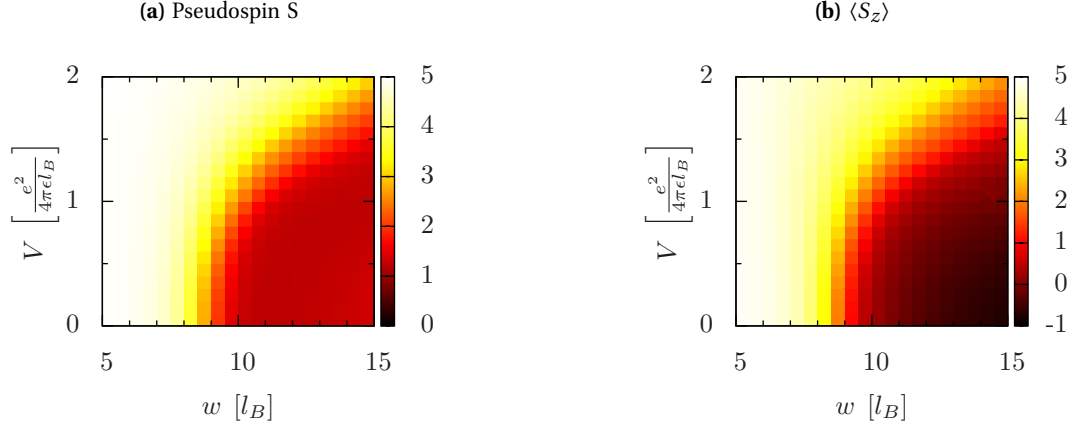


FIGURE 5.9 Norme (a) et composante suivant z (b) du pseudospin pour $N = 10$ et $N_B = 17$ à $\nu = 1/2$. Une plus grande largeur w diminue le pseudospin tandis qu'un biais non nul en augmente la norme. On remarque que le pseudospin est quasiment aligné avec la direction z dans tout le diagramme car $S \approx \langle S_z \rangle$. Notons que dans les puits très larges ($w \gtrsim 14 l_B$) et à faible biais $S \approx \langle S_z \rangle$ est négatif : la sous-bande excitée devient plus peuplée que la plus basse.

domaine polarisé. En revanche, pour des grandes largeurs et faibles biais, où $S_z \approx 0$, on peut éventuellement stabiliser un état singulet de Haldane-Rezayi² et un état multicomposante tel que l'état (331) dans le domaine intermédiaire. Le recouvrement des états modèles avec l'état fondamental est tracé sur la figure 5.10.

La connaissance du recouvrement des états modèles pertinents à $\nu = 1/2$ permet de discuter les trois régions identifiées sur le diagramme de la figure 5.10. Celles-ci sont la région monocomposante aux faibles largeurs ou biais importants, le domaine $\langle S_z \rangle \approx 0$ dans les puits larges faiblement biaisés, et le domaine intermédiaire.

- Dans le régime monocomposante identifié sur la figure 5.9 (faible largeur ou fort biais), le LFFC a le recouvrement le plus important avec l'état fondamental. Cependant ce dernier a également un recouvrement élevé avec l'état pfaffien dans la même région du diagramme de phase. Les deux états n'ont pas le même shift sur la sphère, et une comparaison directe n'est par conséquent pas possible dans cette géométrie. Une telle étude comparative a été menée pour $V = 0$ sur le tore [PPacDS10] qui ne présente pas cet artefact. Il en ressort que l'état pfaffien n'est pas stable à $\nu = 1/2$, et comme les états polarisés à $V \approx 0$ sont adiabatiquement connectés à l'état à $V = 0$, nous en concluons que l'état dans ce régime est probablement un LFFC.
- Dans les puits très larges, $w \gtrsim 10 l_B$ et pour les biais modérés l'état fondamental est « quasi-singulet » (figure 5.9) et on voit qu'il a un recouvrement notable avec l'état de Haldane-Rezayi. Néanmoins le fait que les valeurs restent modérées ($\lesssim 67\%$), et les variations du moment cinétique de l'état fondamental en fonction de la taille du système laissent subsister un doute important sur cette région du diagramme de phase. En effet une transition vers un état inhomogène ($l \neq 0$) est observée aux tailles inférieures (figure 5.8). Cet état inhomogène est polarisé dans la direction \downarrow ($\langle S_z \rangle < 0$), bien que cette polarisation soit faible elle suggère le dépeuplement de la plus basse sous-bande. Ce doute sur les conclusions d'un calcul de diagonalisation exacte dans les puits très larges est renforcé par l'étude Monte-Carlo complémentaire qui sera présentée à la fin de cette section, et qui semble soutenir le cristal de Wigner rectangulaire de la sous-bande excitée comme état fondamental à grande largeur et biais modéré. De plus, dans les puits très larges la validité de l'approximation

2. Notons cependant que notre modèle à deux sous-bandes est moins fiable dans les puits très larges, car au-delà d'une certaine largeur ($w/l_B \approx 15$) on peut avoir $\langle S_z \rangle < 0$, c'est-à-dire que la première sous-bande excitée devient plus peuplée que la plus basse sous-bande, et il faudrait prendre en compte la troisième sous-bande qui peut devenir pertinente.

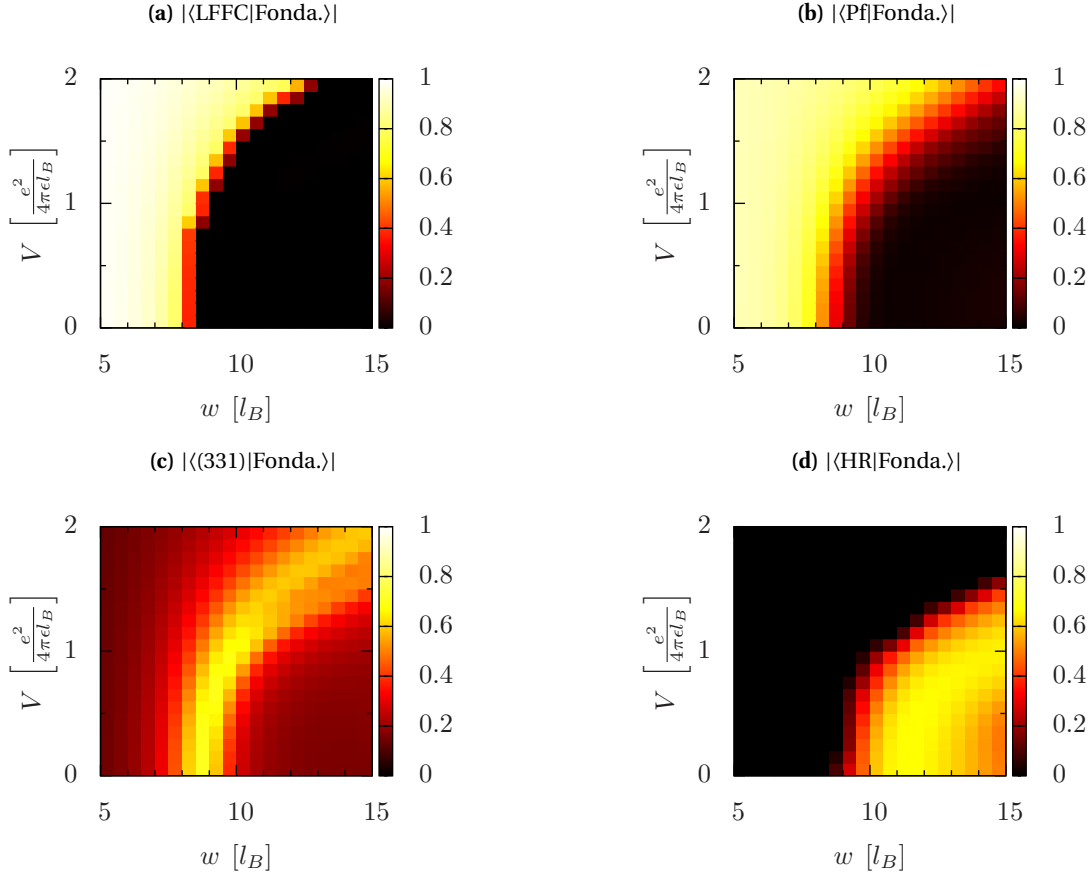


FIGURE 5.10 Recouvrement des états modèles pertinents avec l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 1/2$, en fonction de la largeur w et du biais V du puits. Les quatre états modèles impliqués sont le liquide de Fermi de fermions composites (LFFC) compressible (a), le pfaffien (Pf) (b), l'état de Halperin (331) (c) et l'état singulet de pseudo-spin de Haldane-Rezayi (HR) (d). Les recouvrements présentés ici ont été obtenus après optimisation par rapport à l'angle de polarisation de l'état modèle, et ce pour chaque couple de valeurs (w, V) . L'interprétation de ces diagrammes de recouvrement est discutée dans le texte.

à deux sous-bandes est plus discutable, et les résultats dans cette situation doivent être considérés avec circonspection.

- Dans un régime intermédiaire qui forme un « arc » le recouvrement avec l'état (331) est important. Cet arc est caractérisé par un pseudospin de norme intermédiaire $5 \lesssim \langle S^2 \rangle_{\text{arc}} \lesssim 10$ (à comparer à $\langle S^2 \rangle_{\text{max}} = N/2(N/2 + 1) = 30$ pour $N = 10$ électrons). Or le calcul des valeurs moyennes du pseudospin dans l'état (331) montre que celui-ci a la même ampleur³, $\langle S^2 \rangle_{(331)} \simeq 7,3$ pour $N = 10$. Dans cette région l'optimisation vis-à-vis de la direction de polarisation de (331) dévoile un recouvrement relativement élevé ($\simeq 73\%$). Rappelons que les valeurs arbitraires de $\langle S^2 \rangle$ reflètent le fait que (331) n'est pas état propre de S^2 [MYG89]. Même si la valeur du recouvrement à elle seule n'est peut-être pas suffisamment élevée pour conclure que l'état (331) fournit une description qualitativement correcte des corrélations électroniques dans l'état fondamental du puits biaisé, il est est approximativement le même dans l'ensemble de l'arc de recouvrement élevé. Ainsi les conclusions

3. De manière générale le spin $\langle S^2 \rangle$ de l'état (331) semble relié au nombre de particules N par $\langle S^2 \rangle_{(331)} \simeq 3N/4$, en effet on a $\langle S^2 \rangle_{(331)} = 2,99$ pour $N = 4$, $\langle S^2 \rangle_{(331)} = 4,54$ pour $N = 6$, $\langle S^2 \rangle_{(331)} = 5,92$ pour $N = 8$ et $\langle S^2 \rangle_{(331)} = 7,33$ pour $N = 10$.

qui étaient valides dans le puits large symétriques sont maintenues en présence du biais, le système est toujours à même de former une bicouche effective. Simplement la combinaison linéaire des sous-bandes qui produit la bicouche effective est donnée par les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans le cas symétrique, qui correspond à une rotation de $\pi/2$ du pseudospin par rapport aux sous-bandes $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, alors que dans le puits large asymétrique l'angle de rotation dépend de la valeur du biais et de la largeur, $\theta = \theta(w, V)$.

Le tracé du gap énergétique qui sépare l'état fondamental du premier état excité (figure 5.11) montre que celui-ci est plus grand dans la région de stabilité de l'état (331). Cette concordance corrobore l'interprétation du diagramme de phase en termes d'état (331) qui sous-tend l'EHQF et qui est stable dans une région en forme d'arc. Cette phase d'EHQF qui sépare deux phases compressibles qui sont le LFFC dans la région monocomposante de faible largeur ou biais important et une phase dont la nature est incertaine dans les puits très larges. Ainsi, dans les puits de largeur $w \gtrsim 8l_B$, l'état (331) ne peut être stabilisé qu'en présence d'un biais non nul et il en va donc de même pour l'EHQF.

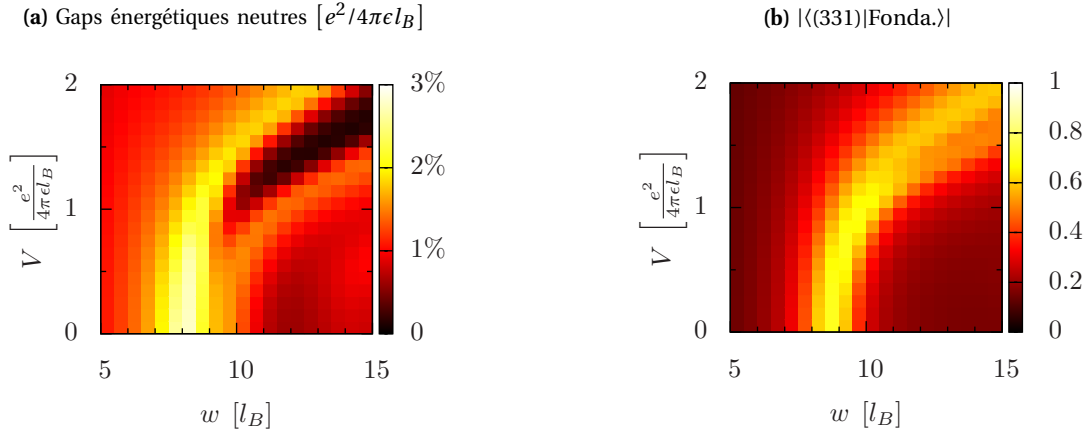


FIGURE 5.11 (a) Gap énergétique entre l'état fondamental et le premier état excité dans le puits biaisé à $\nu = 1/2$, pour $N = 10$ électrons et un shift $\delta = -3$. (b) La région de recouvrement important de l'état (331) avec l'état fondamental (région orange du graphe de droite) correspond à la région de gap élevé, dans laquelle l'EHQF peut être stabilisé.

L'existence d'un arc de stabilité pour l'état (331) a une conséquence importante. En effet, l'asymétrie du potentiel de confinement peut être perçue comme un écueil pour l'observation de l'EHQF à deux composantes, car elle dissymétrise les couches. Pourtant la figure 5.11b montre que dans des puits relativement larges ($w \gtrsim 9l_B$), dans lesquels l'état (331) n'est pas stabilisé dans le cas symétrique, l'application d'un biais non nul produit une situation qui lui est favorable (par exemple pour $V/(e^2/4πεl_B) \simeq 1$ à $w/l_B = 10$). Cette stabilité est perdue pour les biais trop importants.

Ces résultats numériques fournissent une compréhension qualitative des mesures effectuées dans la référence [SGCS09], dans lesquelles un EHQF induit par un biais est observé dans un puits quantique de largeur $w \simeq 8l_B$. Les auteurs de la référence [SGCS09] caractérisent le degré d'asymétrie par le désaccord de densité Δn entre la partie droite du puits et la partie gauche. Ce degré d'asymétrie est déduit du gap de sous-bande et de la connaissance de la largeur du puits, à partir desquels des calculs auto-cohérents (« Poisson+Schrödinger ») permettent d'obtenir le profil de densité dans la direction du potentiel de confinement [Win03]. L'EHQF est obtenu pour une asymétrie $\Delta n \simeq 10^{10} \text{ cm}^{-2}$, ce qui correspond à un biais $V = 16,5 \text{ meV}$ dans le modèle de puits biaisé⁴ d'après les calculs de la référence [SMPT10]. Ce biais correspond à $V/(e^2/4πεl_B) = 1$ pour $B = 14,2 \text{ T}$.

4. En réalité dans la référence [SMPT10] le puits biaisé a une profondeur finie de 270 meV, mais celle-ci est très supérieure au biais et au gap de sous-bande, et on peut donc considérer le puits comme étant infini avec une très bonne approximation.

Notons que la comparaison quantitative avec les expériences est subtile cependant. En premier lieu, nos résultats de taille finie ne peuvent pas être étendus à la limite thermodynamique directement. Néanmoins, les valeurs d'intérêt comme le recouvrement optimisé de l'état fondamental avec (331) ne dépendent que faiblement de la taille du système. Par exemple, pour $w/l_B = 8,5$ le recouvrement maximum est atteint pour $V = 0$ pour toutes les tailles, et pour $w/l_B = 10$, il est atteint près de $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$ (figure 5.12). De plus, dans notre modèle le potentiel de confinement est infini et ne tient donc pas compte de l'extension de la fonction d'onde dans la région extérieure du puits qui est classiquement interdite. Ainsi il sous-estime la largeur effective du puits, de telle sorte que le puits de largeur $w/l_B = 8$ auquel l'EHQF est observé correspond à une largeur plus grande dans notre modèle. Si cet effet est de l'ordre de 10–20%, alors le point expérimental de stabilité de l'EHQF est dans l'arc de stabilité de l'état (331) dans notre modèle. Dans ce cas la stabilisation de l'EHQF par des biais modérés mais non nuls se trouve expliquée par l'interprétation exposée précédemment.

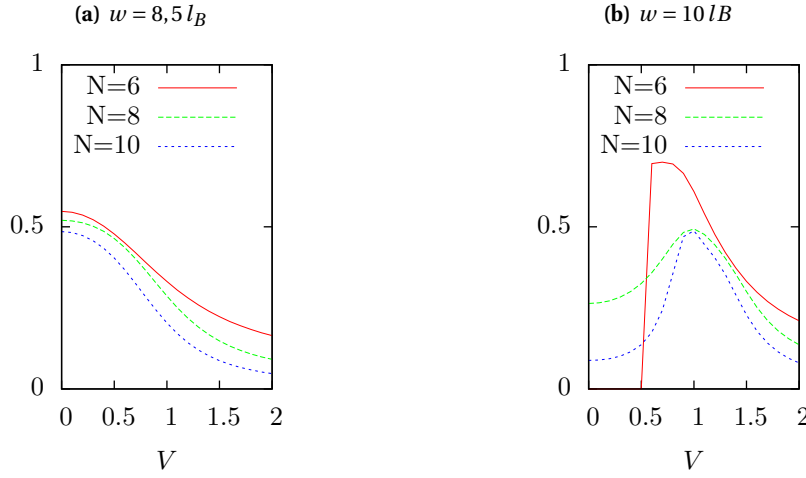


FIGURE 5.12 Recouvrement optimisé de l'état (331) avec l'état fondamental en fonction du biais V à largeur fixe $w = 8,5 l_B$ et $w = 10 l_B$. Les résultats dépendent peu de la taille considérée, et on voit que pour les puits relativement larges $w \gtrsim 9 l_B$, le maximum de recouvrement n'est pas obtenu pour un biais nul, mais à une valeur intermédiaire $V \simeq e^2/4\pi\epsilon l_B$.

Je termine cette section par un rappel du calcul Monte-Carlo des énergies des états modèles dans la limite du puits symétrique ($V = 0$), déjà abordé dans la section 4.3.1. Les résultats de ces calculs, présentés sur la figure 5.13, correspondent à la ligne $V = 0$ des diagrammes de phase présentés jusqu'ici. La comparaison des énergies des différentes phases donne une image cohérente avec l'étude par diagonalisation exacte. L'état fondamental est un LFFC dans les puits fins $w \lesssim 9 l_B$, puis l'état (331) est stabilisé pour $9 l_B \lesssim w \lesssim 10,75 l_B$. J'ai ajouté l'énergie du cristal de Wigner rectangulaire qui ne peuple que la sous-bande excitée, qui s'est avéré être l'état de plus basse énergie à l'issue de l'étude variationnelle du chapitre 4, dans le puits large. Celui-ci devient l'état de plus basse énergie pour les largeurs $w \gtrsim 10,75 l_B$.

La première différence entre les résultats issus de la diagonalisation exacte et ceux issus des calculs Monte-Carlo concerne les puits très larges ($w/l_B > 10$). Alors que l'étude par diagonalisation exacte fait apparaître un état faiblement polarisé ($S^2 \approx 0$) dont le moment cinétique varie en fonction de la taille considérée, les calculs variationnels soutiennent un état inhomogène complètement polarisé dans la direction $|\downarrow\rangle$. Dans cette région du diagramme de phase, les fortes variations de l'état fondamental obtenu par diagonalisation exacte avec le nombre de particules N et le shift δ semblent indiquer que les effets de taille finie sont trop importants pour conclure, et les conclusions des calculs Monte-Carlo apparaissent alors plus vraisemblables. Cependant, il faut garder à l'esprit que dans cette région du diagramme de phase ($w/l_B > 10$, $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) < 1$), l'approximation à deux sous-bandes peut être mise en doute, bien que l'accès

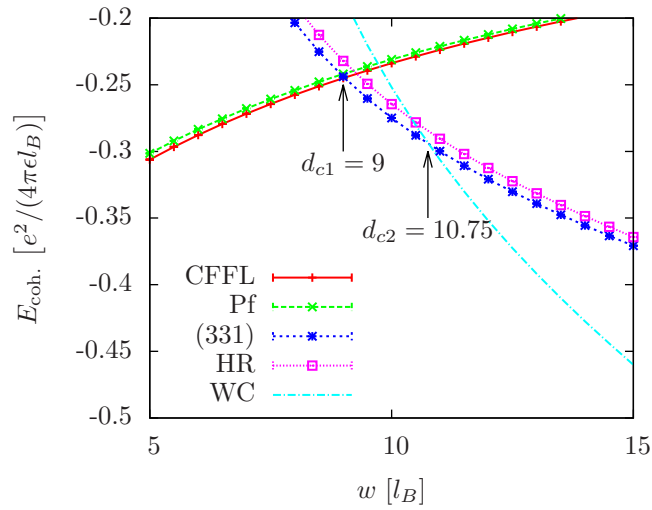


FIGURE 5.13 Énergies des états modèles dans la limite du puits symétrique ($V = 0$). Les énergies sont calculées par méthode Monte-Carlo, comme expliqué dans l'annexe C, puis extrapolées à la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$. J'ai ajouté l'énergie du cristal de Wigner rectangulaire qui ne peuple que la sous-bande excitée. On a vu dans le chapitre 4 que celui-ci est l'état de plus basse énergie parmi tous ceux considérés, dans la limite des puits très larges.

à la troisième sous-bande ait un coût énergétique élevé.

5.2.2 Puits biaisé et modèle de bicouche effective

Afin de gagner en compréhension sur la structure du modèle de puits large biaisé, et d'établir une connexion avec la bicouche étudiée au chapitre 3, je réécris le hamiltonien (5.3) à l'aide des opérateurs densité de pseudospin projetés introduits dans le chapitre 2. Pour rappel l'opérateur densité projeté est défini par

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathbf{r}) &= \mathcal{P}_{\text{PBNL}} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \mathcal{P}_{\text{PBNL}} \\ &= \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \sum_{m,m'} \langle m|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|m'\rangle c_{m\sigma}^{\dagger} c_{m'\sigma}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

où $\mathcal{P}_{\text{PBNL}}$ désigne le projecteur dans le plus bas NL, et $c_{m\sigma}^{(\dagger)}$ est l'opérateur annihilation (création) de l'état individuel de moment cinétique m et de pseudospin $\sigma = \uparrow\downarrow$ dans le plus bas NL. Les opérateurs densité de pseudospin projetés sont définis de manière analogue par

$$\begin{aligned} \bar{S}^i(\mathbf{r}) &= \mathcal{P}_{\text{PBNL}} \sum_{\sigma,\sigma'} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \frac{\tau_{\sigma\sigma'}^{(i)}}{2} \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}) \mathcal{P}_{\text{PBNL}} \\ &= \sum_{\sigma,\sigma'} \sum_{m,m'} \langle m|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|m'\rangle c_{m\sigma}^{\dagger} \frac{\tau_{\sigma\sigma'}^{(i)}}{2} c_{m'\sigma'}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $\tau^{(i)} = \tau^x, \tau^y, \tau^z$ désignent les matrices de Pauli. Le pendant de ces opérateurs densité dans l'espace réciproque permet d'obtenir l'expression suivante du hamiltonien (5.3) selon

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{SU}(2)}(\mathbf{q}) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}) + 2 \sum_{\mathbf{q}} \left[\underbrace{V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}) \bar{S}_z(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q})}_{\text{Bicouche}} + \underbrace{V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}) \bar{S}_x(-\mathbf{q}) \bar{S}_x(\mathbf{q}) + V_B^z(\mathbf{q}) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q})}_{\text{Puits large}} \right. \\ \left. + \underbrace{V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q}) \bar{S}_x(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) + V_B^x(\mathbf{q}) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{S}_x(\mathbf{q})}_{\text{Puits biaisé}} \right] - \Delta \bar{S}_z(\mathbf{0}), \quad (5.11)$$

où

$$\begin{aligned} V_{\text{SU}(2)}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4} [V_{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}(\mathbf{q}) + V_{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{q}) + 2V_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow}(\mathbf{q})] \\ V_B^x(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} [V_{\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow}(\mathbf{q}) + V_{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{q})] \\ V_B^z(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4} [V_{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}(\mathbf{q}) - V_{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{q})] \\ V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}) &= V_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow}(\mathbf{q}) \\ V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} [V_{\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow}(\mathbf{q}) - V_{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{q})] \\ V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4} [V_{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}(\mathbf{q}) + V_{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{q}) - 2V_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow}(\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Les différents termes du hamiltonien (5.11) peuvent être interprétés par comparaison aux hamiltoniens d'autres modèles à deux composantes.

- Le premier terme $V_{\text{SU}(2)}$ représente la partie symétrique SU(2) du potentiel d'interaction. C'est le seul terme pertinent lorsque l'on traite le cas du spin physique, qui respecte cette symétrie SU(2). Ajouté au terme Zeeman, ce modèle a été abondamment utilisé dans la description des ferromagnétiques de Hall, par exemple à $\nu = 1$ [MMY⁺95].
- Si on lui ajoute le second terme V_{bs}^z , on retrouve la structure du hamiltonien (3.7) de la bicouche. L'ajout de ce terme, dans la bicouche, décrit la différence entre l'énergie d'interaction intra-couche et celle inter-couches. Sa présence brise la symétrie SU(2) du potentiel d'interaction mais préserve la symétrie U(1) en vertu de laquelle S_z reste un bon nombre quantique, qui décrit le désaccord de densité entre les couches. L'indice « bs » désigne la brisure de symétrie due à la présence de ce terme dans le hamiltonien. Notons que le dernier terme $-\Delta \bar{S}_z(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ du hamiltonien (3.7), qui décrit le gap de sous-bande du puits large, correspond à un terme tunnel dans le hamiltonien de la bicouche (voir chapitre 2).
- La prise en compte des deux termes suivants, V_{bs}^x et V_B^z , produit le hamiltonien d'interaction du puits large symétrique, dans le modèle du puits carré infini déjà étudié au chapitre 4. Le premier de ces deux termes brise la symétrie U(1) du hamiltonien de la bicouche. L'analyse des différents coefficients d'interaction [PMM⁺09] révèle la hiérarchie $V_{\text{bs}}^x > V_{\text{bs}}^z > V_B^z$ pour toute valeur de q . Si l'on néglige les termes V_{bs}^z et V_B^z en première approximation, le hamiltonien obtenu est celui d'une bicouche, pour laquelle on a simplement choisi de nommer x la direction de quantification du pseudospin, au lieu de z . La validité de cette approximation est corroborée par les résultats numériques du chapitre 4 (figure 4.5, où l'on trouve un recouvrement maximal entre (331) et l'état fondamental pour un angle de rotation $\theta = \pi/2$ qui échange précisément les axes x et z).
- Lorsque le biais est non nul, l'asymétrie du potentiel de confinement fait émerger les deux derniers termes du hamiltonien (5.11), V_{bs}^{xz} et V_B^x . Ceux-ci ne brisent pas de symétrie supplémentaire par rapport au puits symétrique qui ne possédait déjà aucune symétrie de pseudospin. Par contre ils produisent une réorientation de la polarisation. Notons que l'absence de termes \bar{S}_y du hamiltonien (5.11) est simplement due à la possibilité de choisir une phase telle que les sous-bandes $|\uparrow\rangle$ et

$|\downarrow\rangle$ soient toutes deux réelles. Ce choix est toujours possible pour un pseudospin qui décrit les états propres d'un opérateur réel.

- Le dernier terme Δ est l'énergie de sous-bande, qui pénalise le peuplement de la sous-bande excitée $|\downarrow\rangle$. En revanche, l'occupation de la sous-bande excitée offre toujours une réduction de l'énergie d'interaction, à cause du nœud dans la fonction d'onde correspondante. La polarisation du pseudospin de sous-bandes est donc décidée par une compétition entre l'énergie de sous-bande mesurée par Δ et l'énergie d'interaction encodée dans tous les termes d'interaction hormis le terme symétrique $V_{SU(2)}$.

La dissection du hamiltonien (5.11) à laquelle on vient de procéder nous permet d'aborder l'étude de la correspondance entre le hamiltonien de la bicouche et celui du puits biaisé. Cette correspondance nous permettra de comprendre qualitativement l'orientation de la polarisation optimale des états modèles. Pour cela, je commence par définir l'angle de polarisation d'un état par rapport à l'axe x

$$\theta_{\text{pol}} = \arctan\left(\frac{\langle S_z \rangle}{\langle S_x \rangle}\right), \quad (5.13)$$

qui indique la direction dans laquelle pointe le pseudospin en moyenne dans l'état considéré⁵. La polarisation est spécifiée par un seul angle car $\langle S_y \rangle = 0$ pour des pseudo-spineurs réels tels que ceux qui décrivent la sous-bande. Un état polarisé selon S_z a un angle de polarisation de $\pi/2$ qui indique que seule la plus basse sous-bande est peuplée, tandis qu'un état polarisé dans le plan xy (tel que $\langle S_z \rangle = 0$) a un angle de polarisation θ_{pol} nul.

L'angle de polarisation θ_{pol} est tracé sur la figure 3.16 entre $5l_B \leq w \leq 15l_B$ et pour cet intervalle de largeurs assez grandes, on remarque qu'il est toujours égal à $\pi/2$ dans les puits symétriques ($V = 0$), ce qui signifie que la polarisation est toujours selon S_z dans les puits symétriques. Cela est en accord avec la discussion présentée plus haut ; la répulsion V_{bs}^x étant plus forte que V_{bs}^z , le système préfère une polarisation avec $\langle S_x \rangle \approx 0$, c'est-à-dire une polarisation dans le plan zy . En raison du gap de sous-bande, la polarisation est finalement orientée dans la direction z , ce qui donne $\theta_{\text{pol}} = \pi/2$. L'augmentation du biais V produit une rotation de la polarisation, plus prononcée dans les puits les plus larges. J'ai tracé l'angle de rotation optimal pour le recouvrement de l'état (331) avec l'état fondamental sur la figure 5.14b). Celui-ci est en concordance quasi-parfaite avec l'angle de polarisation. Pour comprendre cette observation, je rappelle que l'état (331) a un pseudospin de valeur moyenne nulle $\langle \mathbf{S} \rangle_{(331)} = \mathbf{0}$; néanmoins son pseudospin fluctue dans le plan xy , car $\langle S_x^2 \rangle_{(331)} = \langle S_y^2 \rangle_{(331)} \neq 0$ (mais $\langle S_z^2 \rangle_{(331)} = 0$). La rotation de l'état (331) incline le plan dans lequel ont lieu ces fluctuations, et l'angle de recouvrement maximal est obtenu lorsque ce plan de fluctuation est donné par l'angle de polarisation de l'état fondamental.

Afin de mieux comprendre pourquoi on peut optimiser les fonctions modèles par une rotation dans l'espace de pseudospin, je m'intéresse maintenant au profil de densité dans la direction z du potentiel de confinement. L'opérateur correspondant s'écrit

$$\rho(z) = \int d^2r \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \psi(\mathbf{r}, z) \rangle, \quad (5.14)$$

où $\psi^{(\dagger)}(\mathbf{r}, z)$ est l'opérateur d'annihilation (création) d'un électron à la position \mathbf{r} dans le plan xy et z dans la direction du potentiel de confinement.

Sur la sphère, les états à un corps sont des produits tensoriels des sous-bandes φ_σ et des harmoniques monopolaires $Y_{Q,Q,m}$ [Jai07]. Dans la base de l'espace de Fock formée à partir de ces états à un corps

5. Gardons à l'esprit que la polarisation n'est pas définie dans le sens usuel ici. S^2 et S_z ne sont pas des bons nombres quantiques car ils ne commutent pas avec le hamiltonien (5.11). On peut néanmoins définir une polarisation moyenne comme nous le faisons ici.

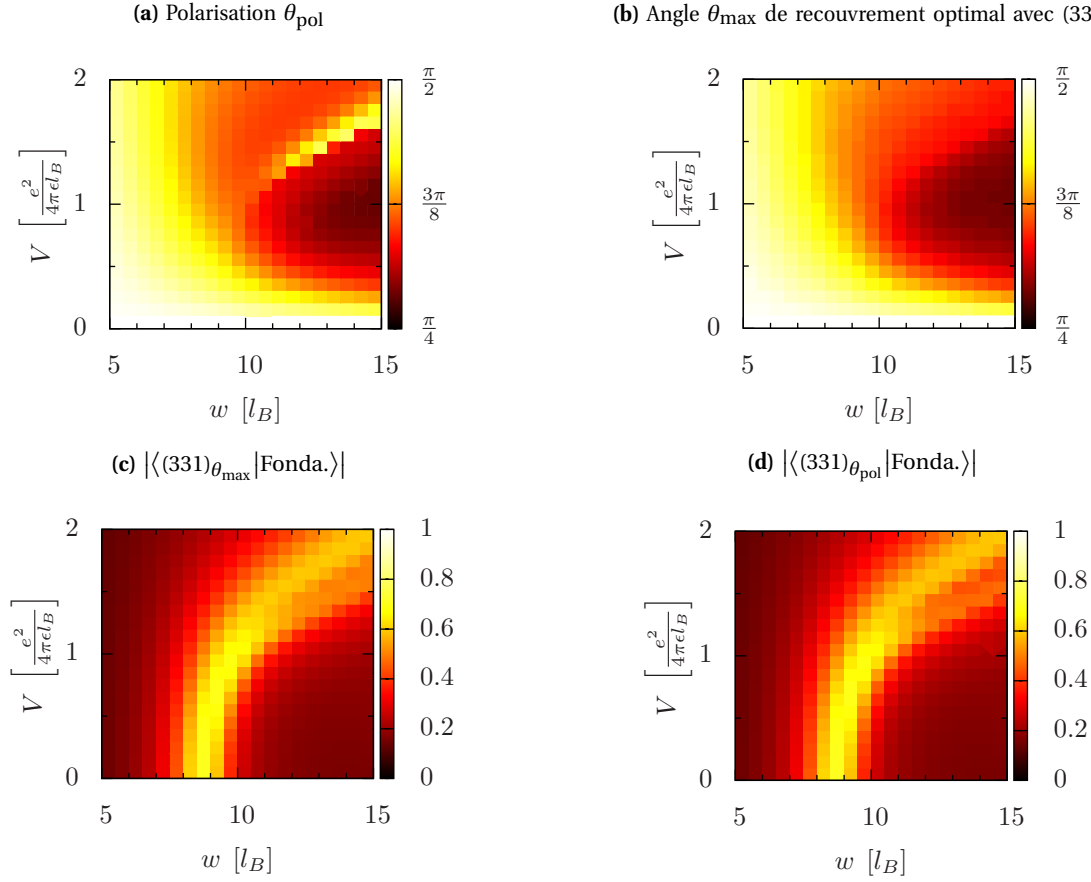


FIGURE 5.14 Comparaison de l'angle de polarisation de l'état fondamental et de l'angle de recouvrement maximal avec l'état (331). Les recouvrements de l'état fondamental avec l'état (331) tourné de ces deux angles dans l'espace de pseudospin sont indistinguables.

l'opérateur d'annihilation s'écrit

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, z) &= \sum_{m=-Q}^Q \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \langle \mathbf{r}, z | m, \sigma \rangle c_{m,\sigma} \\ &= \sum_m \sum_{\sigma} Y_{Q,Q,m}(\mathbf{r}) \varphi_{\sigma}(z) c_{m,\sigma},\end{aligned}\tag{5.15}$$

et on a donc

$$\begin{aligned}\rho(z) &= \int d^2r \sum_{m,m'} \sum_{\sigma,\sigma'} Y_{Q,Q,m}^*(\vec{r}) Y_{Q,Q,m'}(\vec{r}) \varphi_{\sigma}^*(z) \varphi_{\sigma'}(z) \langle c_{m,\sigma}^{\dagger} c_{m',\sigma'} \rangle \\ &= \sum_{\sigma,\sigma'} \varphi_{\sigma}^*(z) \varphi_{\sigma'}(z) \sum_{m,m'} \langle c_{m,\sigma}^{\dagger} c_{m',\sigma'} \rangle \underbrace{\int d^2r Y_{Q,Q,m}^*(\vec{r}) Y_{Q,Q,m'}(\vec{r})}_{=\delta_{m,m'}}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Ainsi, en introduisant la notation $N_{\sigma,\sigma'} = \sum_m \langle c_{m,\sigma}^{\dagger} c_{m,\sigma'} \rangle$ la densité selon z s'écrit

$$\rho(z) = \varphi_{\uparrow}^2(z) N_{\uparrow\uparrow} + \varphi_{\downarrow}^2(z) N_{\downarrow\downarrow} + 2 \varphi_{\uparrow}(z) \varphi_{\downarrow}(z) N_{\uparrow\downarrow},\tag{5.17}$$

où j'ai omis la conjugaison complexe, comme les fonctions d'onde dans la direction z sont réelles $\varphi_\sigma^*(z) = \varphi_\sigma(z)$.

Dans un puits symétrique relativement large ($w = 10 l_B$), le profil de densité dans la direction z montre deux maxima (figure 5.15). Cela ressemble en effet au profil de densité d'une bicouche formée spontanément, hypothèse faite régulièrement dans la littérature [SES⁺92, PMM⁺09, PDS10]. On remarque que les états $|+\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ et $|-\rangle = (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ reproduisent très bien les deux couches de ce profil de densité, au vu des densités de probabilités $|\langle z|\pm\rangle|^2$ (figure 5.15b). La figure 5.15 donne donc une image qui explique pourquoi il est nécessaire d'écrire l'état (331) en terme des couches effectives $|+\rangle$ et $|-\rangle$ afin d'obtenir un recouvrement important avec l'état fondamental; autrement les deux composantes de l'état (331) ne décrivent pas une bicouche.

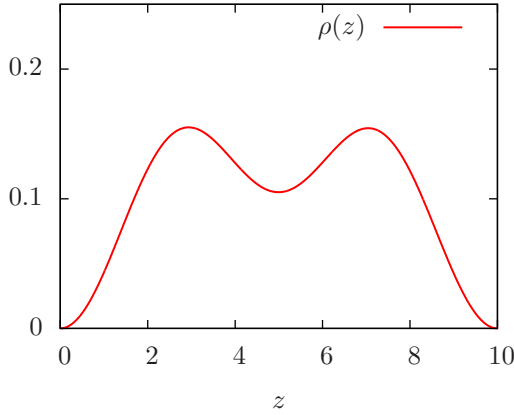
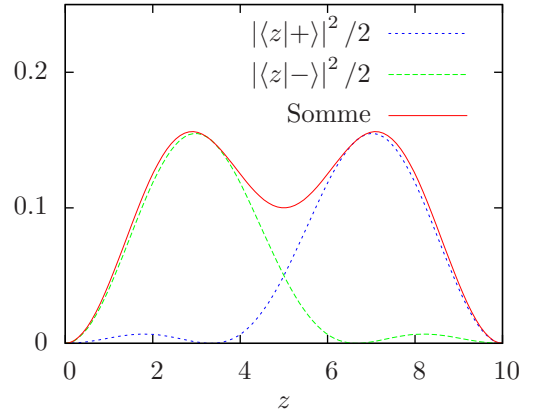
(a) Profil de densité du fondamental ($w = 10$, $V = 0$)(b) Densité de probabilité des états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ 

FIGURE 5.15 Profil de densité suivant z de l'état fondamental du puits large symétrique pour $w = 10 l_B$, et densité de probabilités pour les états $|+\rangle$ (ligne bleue pointillée) et $|-\rangle$ (ligne verte en tirets).

Lorsque le biais est non nul ($V/(e^2/4\pi\epsilon l_B = 1$ par exemple), le profil de densité est asymétrique d'après la figure 5.16a, comme on peut s'y attendre. Pourtant l'aspect bicouche est encore apparent au vu des deux sommets dans le profil de densité. Sur la figure 5.16b, j'ai tracé la densité de probabilité des états

$$|\theta_+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle \quad (5.18)$$

et

$$|\theta_-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle, \quad (5.19)$$

pour l'angle θ_{\max} de recouvrement optimal entre l'état (331) et l'état fondamental.

Comme dans le cas symétrique de la figure 5.15, les états $|\theta_+\rangle$ et $|\theta_-\rangle$ reproduisent correctement les deux couches observées dans le profil de densité. Le caractère bicouche est moins reconnaissable en présence du biais, car les deux couches s'interpénètrent plus notablement que dans le cas symétrique. Pourtant le diagramme de la figure 5.14c montre que l'état (331) optimisé a un recouvrement élevé avec l'état fondamental dans tout un arc du diagramme, qui persiste pour des valeurs importantes du biais ($V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) \simeq 2$). La formation de la bicouche effective qui stabilise l'état (331) n'est donc pas limitée au cas symétrique, et ne nécessite pas une séparation drastique des couches effectives, la seule condition nécessaire à cette stabilité tient dans le rapport de l'interaction effective intra-couche à l'interaction effective inter-couche.

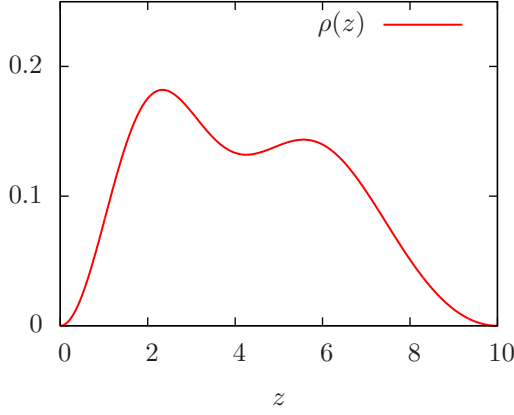
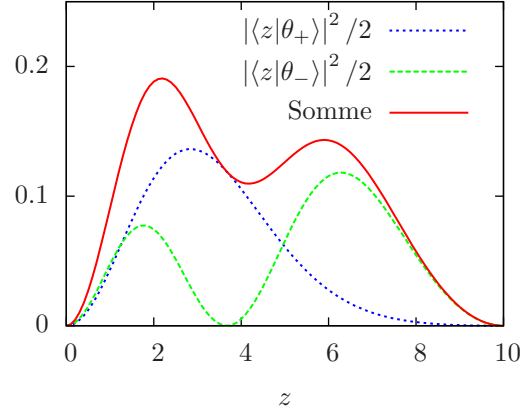
(a) Profil de densité du fondamental ($w = 10$, $V = 1$)(b) Densité de probabilité des états $|\theta_+\rangle$ et $|\theta_-\rangle$ 

FIGURE 5.16 (gauche) Profil de densité suivant z de l'état fondamental du puits biaisé, pour $w = 10 l_B$ et $V = e^2/4\pi\epsilon l_B$. **(droite)** Densité de probabilité des états $|\theta_+\rangle = \cos(\theta_{\text{pol.}}/2)|\uparrow\rangle - \sin(\theta_{\text{pol.}}/2)|\downarrow\rangle$ (ligne bleue pointillée) et $|\theta_-\rangle = \sin(\theta_{\text{pol.}}/2)|\uparrow\rangle + \cos(\theta_{\text{pol.}}/2)|\downarrow\rangle$ (ligne verte en tirets).

Afin d'approfondir l'analogie du puits large biaisé avec un système bicouche, j'utilise maintenant l'expression (5.11) du hamiltonien pour comprendre son comportement sous les rotations de pseudospin, et sa relation avec le hamiltonien d'un système bicouche. La rotation de pseudospin d'angle θ agit comme

$$\begin{pmatrix} z_i^\uparrow \\ z_i^\downarrow \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i^\uparrow \\ z_i^\downarrow \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

sur les spineurs positions. Cette rotation des spineurs est équivalente à une rotation

$$\begin{pmatrix} S^x \\ S^z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^x \\ S^z \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

des opérateurs de pseudospin [CTDL73]. La transformation du hamiltonien (5.11) du puits large sous les rotations de pseudospin se déduit de (5.21), les différents termes sont modifiés comme suit

- Le terme symétrique $V_{SU(2)}$ est inchangé.
- Les termes pseudospin/densité V_B^x et V_B^z sont modifiés comme les opérateurs de pseudospin, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} V_B^x(\mathbf{q}) \\ V_B^z(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_B^x(\mathbf{q}) \\ V_B^z(\mathbf{q}) \end{pmatrix} . \quad (5.22)$$

- Les autres termes qui brisent la symétrie SU(2) deviennent

$$\begin{pmatrix} V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}) \\ V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}) \\ V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}) \\ V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}) \\ V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} . \quad (5.23)$$

Connaissant son comportement sous les rotations de pseudospin, cherchons une base dans laquelle le hamiltonien (5.11) a une structure la plus analogue possible à celle au hamiltonien du système bicouche

$$H_{\text{bicouche}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{SU}(2)}(\mathbf{q}) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}) + 2 \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}) \bar{S}_z(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) - \Delta_z \bar{S}_z(\mathbf{0}) - \Delta_x \bar{S}_x(\mathbf{0}), \quad (5.24)$$

où $\Delta_z = 2(\mu_{\downarrow} - \mu_{\uparrow})$ est un terme Zeeman qui décrit la différence de potentiel chimique entre les couches, et Δ_x est le terme tunnel présenté dans la section 3.1.2.

Pour établir cette analogie on peut négliger les termes $V_B^{x/z}$. En effet ceux-ci peuvent être traité en champ moyen en remplaçant $\bar{\rho}(\mathbf{q}) \rightarrow n\delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}}$ et ainsi

$$H_B^{x/z} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_B^{x/z} \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{S}_{x/z}(\mathbf{q}) \rightarrow \frac{n}{2} V_B^{x/z}(\mathbf{q}=\mathbf{0}) \bar{S}_{x/z}(\mathbf{q}=\mathbf{0}). \quad (5.25)$$

À travers ce traitement les deux termes mentionnés renormalisent alors simplement les termes tunnels $H_t = -\Delta_x \bar{S}_x(\mathbf{q}=\mathbf{0})$ et Zeeman $H_z = -\Delta_z \bar{S}_z(\mathbf{q}=\mathbf{0})$ à un corps.

Notons que le traitement en champ moyen des termes spin/densité $V_B^{x/z}$ est justifié par le fait que l'on cherche seulement un angle de polarisation qui minimise approximativement l'interaction pseudo-spin/pseudospin selon la direction S_x . Notons que le hamiltonien de la bicouche (5.24) pourrait être reproduit en introduisant un angle $\theta_{\text{bic}}(\mathbf{q})$ qui dépend de \mathbf{q} . Cependant je lui préfère l'analogie approximative offerte par un angle global θ_{bic} , car elle apporte une interprétation plus claire. Nous verrons plus loin que cette approximation est en assez bon accord avec les résultats obtenus numériquement.

Pour obtenir la correspondance approximative entre le hamiltonien du puits large (5.11) et celui de la bicouche (5.24), cherchons un angle θ_{bic} qui minimise à la fois le terme $V_{\text{bs}}^x(\theta)$ et le terme $V_{\text{bs}}^{xz}(\theta)$. Au vu de l'équation (5.23), l'angle θ_{bic} qui maximise le terme $V_{\text{bs}}^z(\theta)$ minimise $V_{\text{bs}}^x(\theta)$, et annule $V_{\text{bs}}^{xz}(\theta)$ (on peut le voir en calculant les dérivées des coefficients tournés V_{bs} par rapport à θ). En calculant la dérivée de V_{bs}^z par rapport à θ , on remarque également que ce même angle θ_{bic} annule le terme V_{bs}^{xz} . Cette condition s'écrit

$$[V_{\text{sb}}^z(\mathbf{q}) - V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q})] \sin 2\theta_{\text{bic}} + V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q}) \cos 2\theta_{\text{bic}} = 0 \quad (5.26)$$

mais elle introduit un angle qui dépend de \mathbf{q} . Dans la mesure où nous cherchons seulement à annuler le terme V_{sb}^{xz} du hamiltonien (5.11), et pas à en annuler chaque coefficient $V_{\text{sb}}^{xz}(\mathbf{q})$, on obtient la condition

$$\sum_{\mathbf{q}} \{ [V_{\text{sb}}^z(\mathbf{q}) - V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q})] \sin 2\theta_{\text{bic}} + V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q}) \cos 2\theta_{\text{bic}} \} \bar{S}_x(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) = 0, \quad (5.27)$$

qui ne fait intervenir qu'un angle θ_{bic} global, c'est-à-dire indépendant de \mathbf{q} . On peut réécrire cette condition

$$\tan(2\theta_0) \left\{ \sum_{\mathbf{q}} [V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}) - V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q})] \bar{S}_x(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) \right\} = \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{sb}}^{xz}(\mathbf{q}) \bar{S}_x(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}). \quad (5.28)$$

L'angle θ_{bic} est obtenu par un traitement de champ moyen, dans lequel les opérateurs densité projetés sont remplacés par leurs valeurs moyennes dans un état d'essai homogène

$$\langle \bar{S}_i(\mathbf{q}) \rangle_{\text{cm}} \propto \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}}. \quad (5.29)$$

Ce traitement en champ moyen est justifié car nous cherchons seulement à comprendre l'angle de polarisation moyen de l'état fondamental, et pas à résoudre le problème à partir d'un traitement de champ moyen sur le hamiltonien complet. Dans cette approximation la condition (5.28) se simplifie, de telle sorte que

l'angle de polarisation pour lequel le hamiltonien du puits biaisé a approximativement la même structure que celui de la bicouche est donné par

$$\theta_{\text{bic}} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{0})}{V_{\text{bs}}^z(\mathbf{0}) - V_{\text{bs}}^x(\mathbf{0})} \right). \quad (5.30)$$

Après rotation d'angle θ_{bic} et en négligeant les (petits) termes V_B^x et V_B^z , le hamiltonien (5.11) a l'expression

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{SU}(2)}(\mathbf{q}) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}) + 2 \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}, \theta_{\text{bic}}) \bar{S}_z(-\mathbf{q}) \bar{S}_z(\mathbf{q}) \\ + 2 \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}, \theta_{\text{bic}}) \bar{S}_x(-\mathbf{q}) \bar{S}_x(\mathbf{q}) - \Delta \cos \theta_{\text{bic}} \bar{S}_z(\mathbf{0}) + \Delta \sin \theta_{\text{bic}} \bar{S}_x(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

où les coefficients tournés $V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}, \theta_{\text{bic}})$ et $V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q}, \theta_{\text{bic}})$ sont liés aux coefficients originaux $V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q})$ et $V_{\text{bs}}^z(\mathbf{q})$ par l'équation (5.23), tandis que le terme $V_{\text{bs}}^{xz}(\mathbf{q})$ est précisément annulé par la rotation d'angle θ_{bic} . Comme il a été dit précédemment, le terme $V_{\text{bs}}^x(\mathbf{q}, \theta)$ est minimum en $\theta = \theta_{\text{bic}}$; en le négligeant on retrouve finalement la forme du hamiltonien de la bicouche (5.24).

L'état fondamental d'une bicouche dont les termes Zeeman et tunnel sont suffisamment faibles a un recouvrement élevé avec l'état (331) [PacGRMac10]. Ainsi, à condition que nos approximations ne soit pas trop grossières, et si elles produisent des termes Zeeman et tunnel relativement faibles, on s'attend à ce que notre hamiltonien modèle ait un recouvrement important avec l'état (331).

J'ai tracé l'angle θ_{bic} en fonction de la largeur w et du biais V sur la figure 5.17. Bien que θ_{bic} diffère légèrement de l'angle de recouvrement optimal pour (331) (figure 5.14c) pour les biais importants, le recouvrement de l'état (331) tourné d'un angle θ_{bic} avec l'état fondamental (figure 5.17b) a quasiment la valeur optimale, pour toute valeur du biais. Ceci traduit le fait que l'angle θ_{bic} qui reproduit la bicouche est une bonne approximation de l'angle optimal dans toute l'arc de recouvrement élevé de (331) avec l'état fondamental. En effet la différence moyenne entre les deux angles vaut 0,07 dans l'arc pour un écart-type de 0,042. En comparaison, l'écart moyen entre l'angle de polarisation θ_{pol} et l'angle de recouvrement maximal θ_{max} vaut 0,025 pour un écart-type de 0.05. Ces variations angulaires sont faibles si on les compare à l'intervalle $[\pi/4; \pi/2]$ qui est exploré dans l'ensemble du diagramme de phase. Ce résultat est agréablement surprenant, car malgré les approximations grossières auxquelles j'ai eu recours dans cette section, à savoir le traitement en champ moyen de la densité et l'omission de certains termes du hamiltonien, la capacité de cette approche à déterminer l'angle de recouvrement maximal est étonnamment précise.

Dans les régions dans lesquelles l'état (331) est stabilisé, il suffit donc de trouver l'angle dans lequel le hamiltonien du puits biaisé (5.11) se rapproche au mieux du hamiltonien bicouche (5.24) pour obtenir l'angle de rotation optimal pour (331) et la direction de polarisation de l'état fondamental.

En conclusion, cette section apporte une interprétation relativement simple du recouvrement élevé de l'état (331) avec l'état fondamental dans tout un arc du diagramme de phase 5.14c. Selon celle-ci, un système bicouche peut être formé avec une combinaison linéaire des sous-bandes décrite par un angle θ_{bic} qui minimise les termes de brisure de symétrie $U(1)$ du hamiltonien (5.24). La valeur moyenne $\langle S_z \rangle$ est minimisée par cette rotation, et l'état (331) – qui vérifie $S_z | (331) \rangle = 0$ – est alors stabilisé.

5.2.3 Comparaison avec une valeur différente du champ magnétique

La valeur du champ magnétique qui détermine le rapport entre l'énergie d'interaction et l'énergie de sous-bande était fixée à 14,2 T jusqu'ici. Cette valeur a été choisie parce que pour les densités typiques

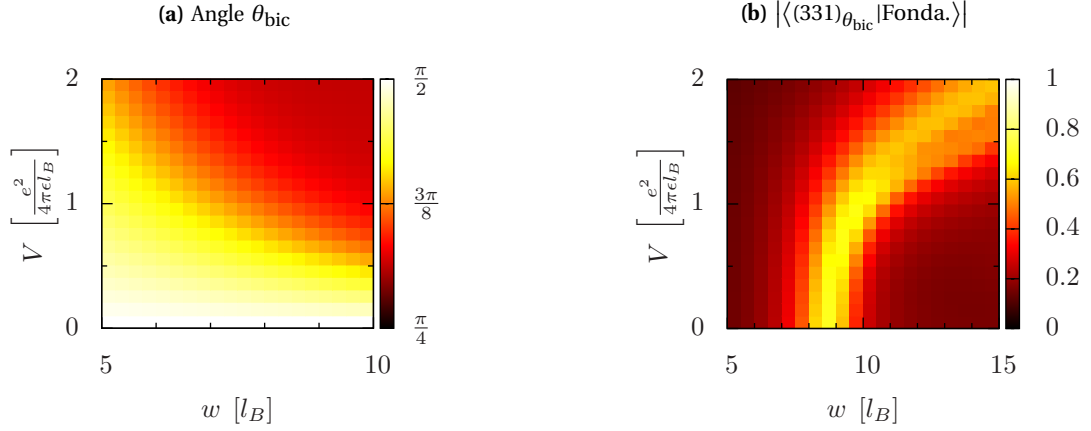


FIGURE 5.17 Angle θ_{bic} pour lequel le hamiltonien du puits biaisé approche celui de la bicouche et recouvrement de l'état fondamental avec l'état (331) tourné de θ_{bic} dans l'espace de pseudospin. Les paramètres du diagramme sont la largeur w et le biais V du puits, et le recouvrement montré correspond à un système de $N = 10$ électrons.

des expériences ($n \sim 10^{-11} \text{ cm}^{-2}$) elle correspond à $\nu = 1/2$. Afin de vérifier si les résultats obtenus précédemment ne sont pas particuliers à cette valeur $B = 14,2 \text{ T}$, je présente ici les mêmes calculs que ceux de la section précédente, pour un champ magnétique différent, $B = 7 \text{ T}$. À nouveau je ne présente que les résultats pour un système de $N = 10$ électrons, car les tailles inférieures ($N = 6, N = 8$) ne présentent pas de différences qualitatives.

Le tracé des valeurs moyennes du pseudospin \mathbf{S} sur la figure 5.18 montre le même comportement que pour $B = 14,2 \text{ T}$. Le pseudospin est toujours aligné suivant z , mais sa norme diminue lorsque la largeur w augmente jusqu'à s'annuler, puis la polarisation s'inverse et pointe dans la direction \downarrow dans les puits symétriques très larges ($w \gtrsim 9 l_B$). Le biais V a l'effet inverse et renforce la polarisation selon $|\uparrow\rangle$.

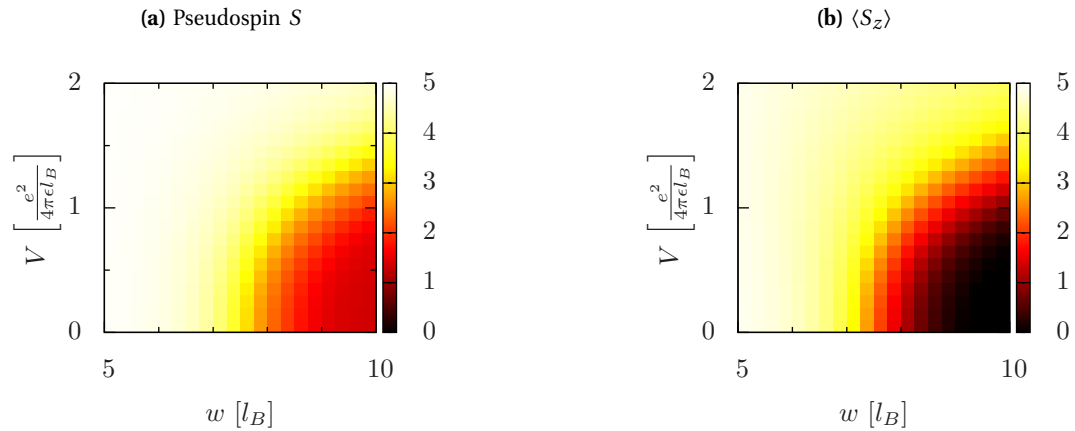


FIGURE 5.18 Norme et composante suivant z du pseudospin pour $N = 10$ et $N_B = 17$ à $\nu = 1/2$ pour $B = 7 \text{ T}$. L'évolution du spin avec les paramètres est qualitativement la même que pour $B = 14,2 \text{ T}$ (figure 5.9), simplement l'ensemble du diagramme est décalé vers les largeurs w plus faibles en unités de l_B , qui correspondent approximativement à la même largeur en unités SI, et donc au même gap de sous-bande.

La tracé des angles de polarisation et du recouvrement optimisé de l'état (331) avec l'état fondamental

dévoile les même similarités entre le système à $B = 7$ T (figure 5.19) et celui à $B = 14,2$ T (figure 5.14). L'état (331) est à nouveau stable dans une région en forme d'arc, caractérisée par un recouvrement d'environ 80%. L'angle de rotation θ_{\max} qui donne le recouvrement optimisé coïncide, comme précédemment, avec l'angle de polarisation de l'état fondamental.

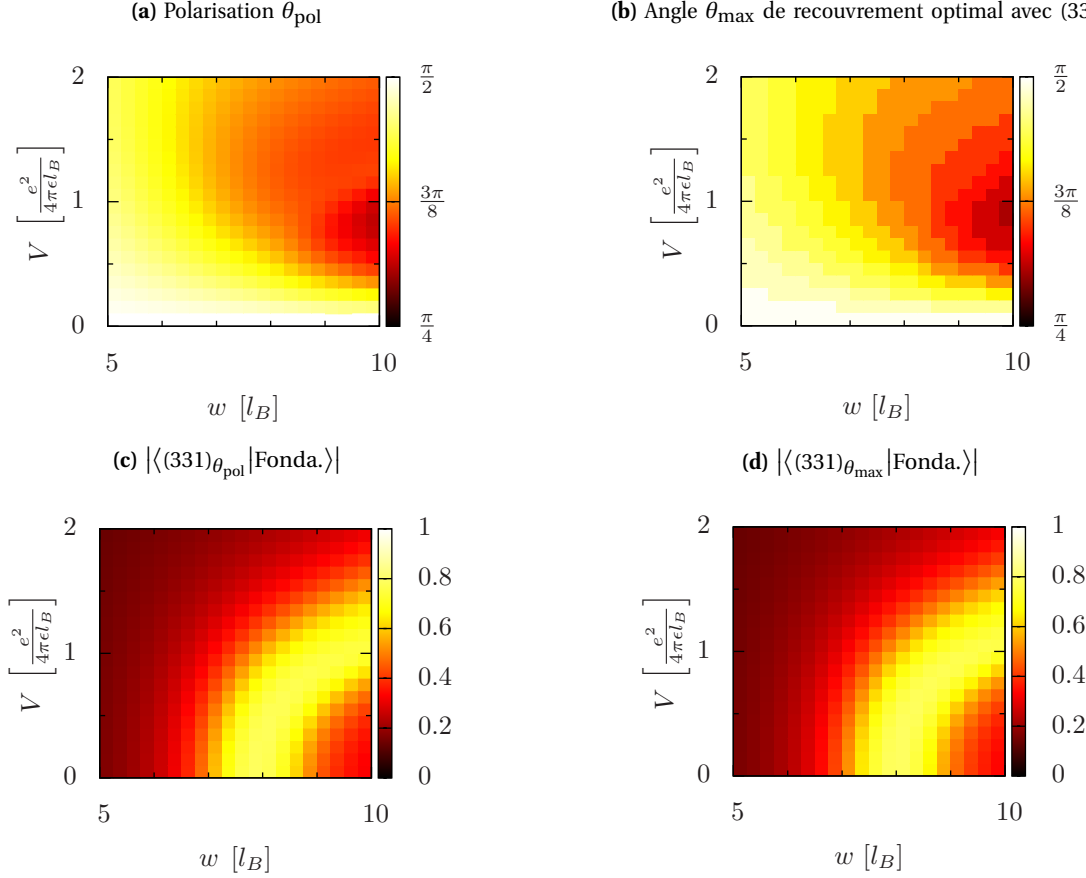


FIGURE 5.19 Comparaison de l'angle de polarisation de l'état fondamental et de l'angle de recouvrement maximal avec l'état (331) pour $B = 7$ T. Cette figure est à comparer avec la figure 5.14 pour laquelle le champ magnétique est approximativement double ($B = 14,2$ T).

L'arc de stabilité de l'état (331) pour $B = 7$ T est légèrement décalé vers les faibles valeurs de w . Cette observation peut s'expliquer par un argument d'échelle simple. Considérons la limite $V = 0$ du puits symétrique. L'état (331) est stabilisé lorsque le gain en énergie de corrélation $\sim (w/l_B) \times e^2/4\pi\epsilon l_B$ offert par l'occupation de la sous-bande excitée compense l'énergie de sous-bande $\Delta/2 \propto w^{-2}$ [PMM⁺09]. Cette condition de stabilité s'écrit

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{w}{l_B} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon l_B} \implies \left(\frac{w}{l_B}\right)^3 \propto \frac{1}{l_B} \propto \sqrt{B}, \quad (5.32)$$

soit $w/l_B \propto B^{1/6}$. Ici le champ magnétique vaut la moitié de celui que l'on a considéré précédemment, on s'attend donc à ce que les largeurs de stabilité de l'état (331) pour les deux valeurs de B soient reliées par

$$\left(\frac{w}{l_B}\right)_{[B=7\text{ T}]} = \left(\frac{7}{14}\right)^{1/6} \times \left(\frac{w}{l_B}\right)_{[B=14\text{ T}]} \simeq 0,9 \left(\frac{w}{l_B}\right)_{[B=14\text{ T}]} \quad (5.33)$$

En remarquant que l'arc de stabilité de (331) à $V = 0$ est centré autour de $(w/l_B)[B = 7 \text{ T}] = 9 l_B$ pour $B = 14,2 \text{ T}$ (figure 5.11b) et autour de $(w/l_B) = 8 l_B$ pour $B = 7 \text{ T}$ (figures 5.14d et 5.14c), on obtient la confirmation que les arguments d'échelles exposés ici suffisent à expliquer les différences quantitatives relatives à la variation du champ magnétique. Un champ magnétique différent change simplement le rapport entre l'énergie d'interaction (qui dépend du champ magnétique) et l'énergie de sous-bande (qui n'en dépend pas), les transitions de phases sont toujours les mêmes mais elles surviennent à des largeurs et biais différents.

5.2.4 Second niveau de Landau : $\nu = 5/2$

Je termine cette section sur l'EHQF dans les puits biaisés avec une brève discussion des phases dans le second NL ($N = 1$). Par rapport au plus bas NL la partie à courte portée de l'interaction est aplatie par rapport au plus bas NL. Il a été montré dans des études numériques que cela favorise un état fondamental pfaffien dans les systèmes monocomposantes de faible largeur [Mor98]. Dans cette section, nous abordons la question de la transition de cet état pfaffien monocomposante vers un état multi-composantes, induite par le biais dans les puits très larges. Pour l'étude de ce facteur de remplissage je fixe le champ magnétique qui détermine le rapport entre l'énergie de sous-bande et l'interaction effective à $B = 7 \text{ T}$; cette valeur est caractéristique des valeurs expérimentales du second NL dans les puits quantiques d'AlGaAs/GaAs.

Les principales caractéristiques (polarisation moyenne de pseudospin de sous-bande, moment cinétique orbital) dans l'état fondamental sont présentées sur la figure 5.20 pour le shift $\delta = -3$ de l'état (331) et du pfaffien. On remarque sur la figure 5.20c une transition d'un état inhomogène aux faibles largeurs et/ou biais élevés vers un état inhomogène ($L \neq 0$) à grande largeur et/ou aux biais inférieurs. Contrairement au cas du plus bas NL, j'ai vérifié que la région d'inhomogénéité dépend peu de la taille du système et du shift dans le second NL, et semble donc constituer une caractéristique des puits très larges à $\nu = 5/2$. Le tracé des valeurs moyennes du spin (figure 5.20) montre de plus que cet état inhomogène est quasi-singulet dans le secteur du pseudo-spin, contrairement à la région du diagramme de phase dans laquelle l'état fondamental est homogène. Cette région homogène est, elle, caractérisée par une polarisation quasi-totale dans la direction z .

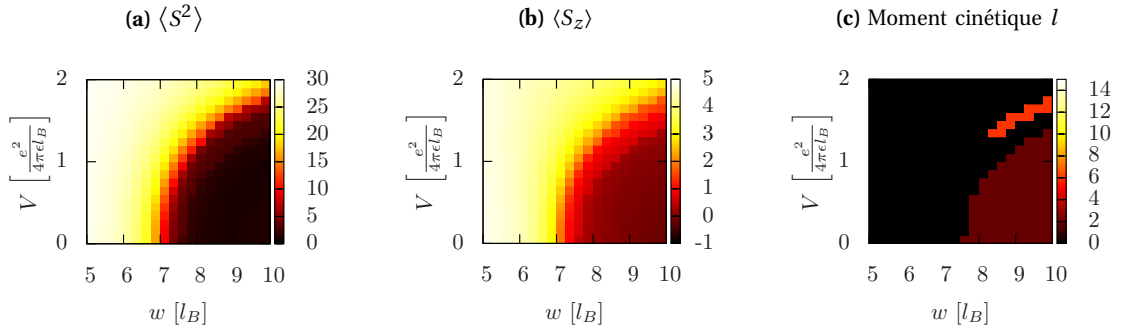


FIGURE 5.20 Valeurs moyennes du pseudospin et du moment cinétique de l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 5/2$, au shift $\delta = -3$. Dans les puits relativement larges $w \gtrsim 7 l_B$ et pour les biais modérés l'état fondamental est inhomogène ($l \neq 0$) et le pseudospin est quasiment singulet.

Afin de mieux comprendre la nature de la transition entre un état homogène polarisé en pseudospin vers un état inhomogène singulet, j'ai tracé sur la figure 5.21 le recouvrement de l'état fondamental avec les états modèles pertinents à demi-remplissage, déjà présentés lors de l'étude du plus bas NL dans la section 5.2.1.

Dans le second NL on s'attend à ce qu'un état pfaffien soit stabilisé dans le domaine monocomposante [Mor98], c'est-à-dire aux faibles largeurs ou biais importants. C'est bien ce que la figure 5.21 indique ;

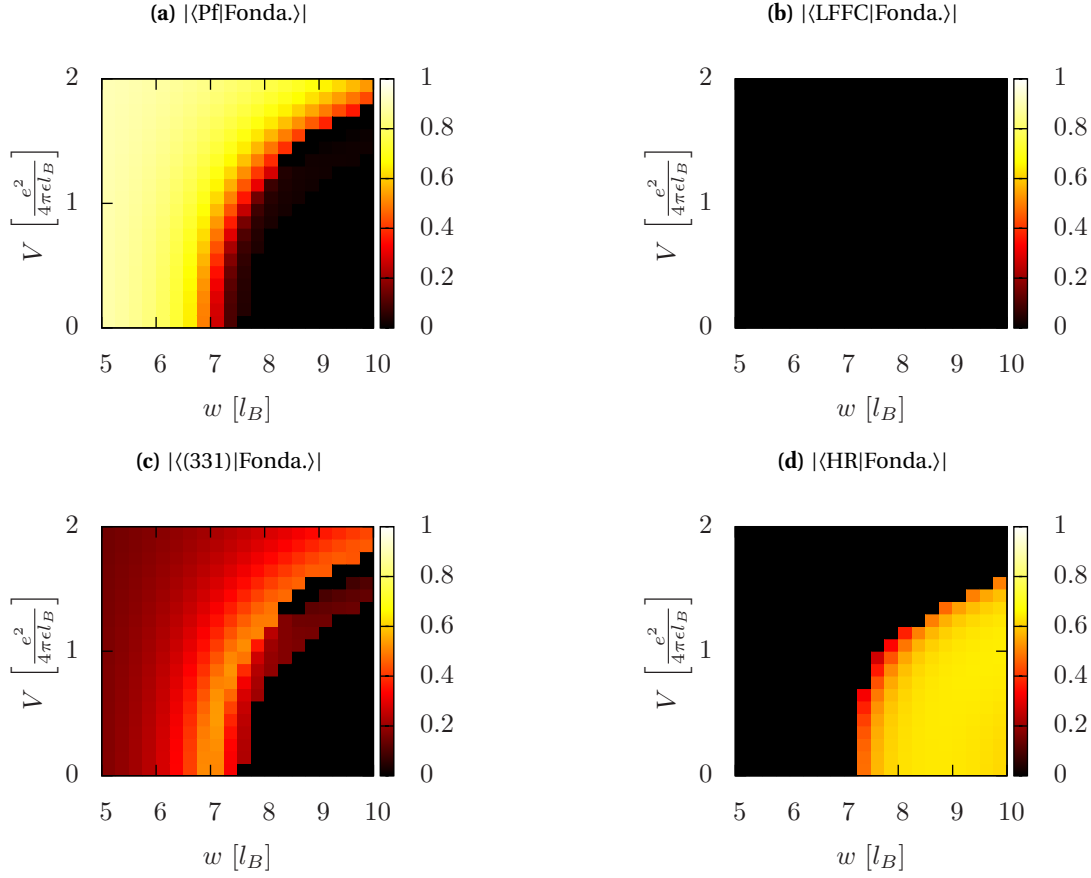


FIGURE 5.21 Recouvrement des états modèles pertinents avec l'état fondamental du puits biaisé à $\nu = 5/2$ en fonction de la largeur w et du biais V . Les états considérés sont le pfaffien (Pf) et le liquide de Fermi de fermions composite (LFFC), ainsi que les états à deux composantes (331) et de Haldane-Rezayi (HR). Seul l'état pfaffien apparaît pertinent parmi tous les candidats présentés, car dans la région monocomposante caractérisée par de faibles largeurs $w/l_B \leq 7$ ou les biais importants, l'état pfaffien a un large recouvrement avec l'état fondamental ($\approx 90\%$). Pour le shift du LFFC ($\delta_{\text{LFFC}} = -2$) l'état fondamental est inhomogène ($L \neq 0$) et c'est pourquoi le recouvrement correspondant est nul.

le recouvrement du pfaffien avec l'état fondamental est important ($\approx 90\%$) dans la région monocomposante. De plus, contrairement au cas du plus bas NL, le liquide de Fermi de fermions composites (LFFC) a un recouvrement nul partout dans notre diagramme de phase, car l'état fondamental est inhomogène pour le shift du LFFC ($\delta_{\text{LFFC}} = -2$), et n'est donc pas dans le même secteur de L^2 que ce dernier. Ce recouvrement est également quasiment nul pour les tailles inférieures, dans la même gamme de paramètres.

Dans le régime multicomposante, l'état (331) a un recouvrement substantiel avec l'état fondamental dans une région en forme d'arc semblable à celle du plus bas NL. Pourtant, le recouvrement ($\lesssim 53\%$) est bien inférieur à celui du plus bas NL et ne permet pas de conclure sur la stabilité d'un état (331) dans cette région où même le pfaffien garde un recouvrement important avec l'état fondamental. Cette observation dévoile une différence qualitative entre les deux plus bas NL. Alors que dans le plus bas NL l'EHQF observé à demi-remplissage semble être sous-tendu par un état (331) à deux composantes (figure 5.10) qui n'est stabilisé que dans les puits de largeur intermédiaire, l'EHQF observé à demi-remplissage du second NL trouve dans une large gamme de paramètres (w, V) un état modèle fidèle dans l'état pfaffien, qui est un état à une

composante. Enfin l'état singulet de Haldane-Rezayi a – comme dans le plus bas NL – un statut incertain dans le second NL, dans la mesure où son recouvrement avec l'état fondamental ($\lesssim 65\%$) ne permet pas de conclure sur sa stabilisation potentielle. Notons que l'inhomogénéité qui est observée à tous les autres shifts que celui de l'état HR suggère la stabilisation d'un état cristallin dans les puits les plus larges $w \gtrsim 7 l_B$. Cette hypothèse est appuyée par le fait que dans le second NL et dans les puits large, il existe des preuves expérimentales [LCE⁺99, DTS⁺99] et théoriques [KFS96, MC96, GLMS03, GLMS04] de la formation d'un cristal de rubans, comme le soutiennent les résultats de la section 4.4 dans la limite du puits symétrique ($V = 0$).

5.3 Stabilité de l'état de Halperin (532) dans le puits biaisé

Dans cette dernière section, je reviens dans le plus bas NL pour poursuivre une étude entamée dans le chapitre 3 sur la stabilité d'un état de Halperin (532) asymétrique. Nous y avons vu qu'un tel état peut être stabilisé par un biais entre les couches. J'étudie maintenant la possibilité de stabiliser l'état de Halperin (532) dans un puits large biaisé. Cette possibilité offre une explication potentielle pour l'EHQF particulier observé à $\nu = 4/11$ [PST⁺03], et pourrait constituer une alternative à l'interprétation en termes d'EHQF de fermions composites proposée pour le même facteur de remplissage [GLS04b, GLS04a, CJ04].

L'état de Halperin (532) décrit un système à deux composantes corrélées de densités différentes, à $\nu_1 = 1/11$ et $\nu_2 = 3/11$. Cet état est plus vraisemblablement favorisé dans un système biaisé, du fait de son asymétrie. Comme on l'a vu dans la section 3.4 à l'aide de calculs de diagonalisation numérique exacte, dans la bicouche biaisée l'état (532) a un domaine de stabilité caractérisé par un recouvrement $\gtrsim 90\%$ avec l'état fondamental. Ce domaine de stabilité est visible sur la figure 3.17, où on remarque qu'il correspond à un biais non nul $\Delta \simeq d/10$, et est limité aux distances $d \lesssim 3 l_B$.

Alors que la bicouche biaisée n'a que deux paramètres, la distance d et le biais Δ , le puits biaisé en a trois. Ceux-ci sont la largeur w , le biais V et la longueur magnétique qui détermine l'interaction effective. Dans la référence [PST⁺03], l'EHQF observé à $\nu = 4/11$ correspond à un champ magnétique $B_{\nu=4/11} = 11,4$ T. J'adopte cette valeur du champ magnétique pour cette section. Avant de déterminer le recouvrement de l'état (532) avec l'état fondamental du puits biaisé, commençons par nous intéresser aux caractéristiques de ce dernier. Les valeurs moyennes du pseudospin et le moment cinétique sont montrés sur la figure 5.22 pour un système de $N = 10$ électrons. On remarque que, comme pour $\nu = 1/2$ (figures 5.9 et 5.18), l'état fondamental est toujours polarisé selon z . Pour cette taille l'état (532) est également complètement polarisé dans la direction z , et son spin vaut $S_z = 1$. Le domaine de stabilité potentiel de cet état modèle correspond donc aux régions oranges ($\langle S \rangle \simeq \langle S_z \rangle \simeq 1$) des figures 5.22a et 5.22b. Néanmoins c'est à peu près dans cette même région qu'a lieu une transition vers un état inhomogène, qui domine pour $w/l_B \gtrsim 10$ et aux biais modérés (figure 5.22c).

Ainsi le domaine de stabilité de l'état (532) dans le puits biaisé est à la lisière d'une transition vers un état inhomogène. Le recouvrement de cet état avec l'état fondamental est présenté sur la figure 5.23a pour le même nombre de particules ($N = 6$). Le recouvrement a été optimisé par rotation de l'état (532) dans l'espace de pseudospin, selon la procédure décrite dans la section 5.1, mais en réalité l'optimisation s'avère superflue car l'angle de rotation optimal est toujours très proche de zéro. Ceci indique que la polarisation de l'état fondamental est déjà quasiment alignée avec celle de l'état (532) lorsque ce dernier est écrit en termes de composantes \uparrow et \downarrow qui sont les deux plus basses sous-bandes du puits biaisé.

On voit sur la figure 5.23a que ce recouvrement est faible dans l'ensemble du diagramme mis à part la région des puits relativement larges ($w \gtrsim 10 l_B$), dans laquelle la stabilité de l'état (532), qui est plus vraisemblable au vu du recouvrement plus élevé ($|\langle (532) | \text{Fonda} \rangle| \lesssim 73\%$), est compromise par une transition vers un état inhomogène ($L \neq 0$). Néanmoins, on peut garder trace de l'état homogène ($L = L_z = 0$) de plus basse énergie en considérant également le premier état excité du hamiltonien (5.3) du puits biaisé. Son

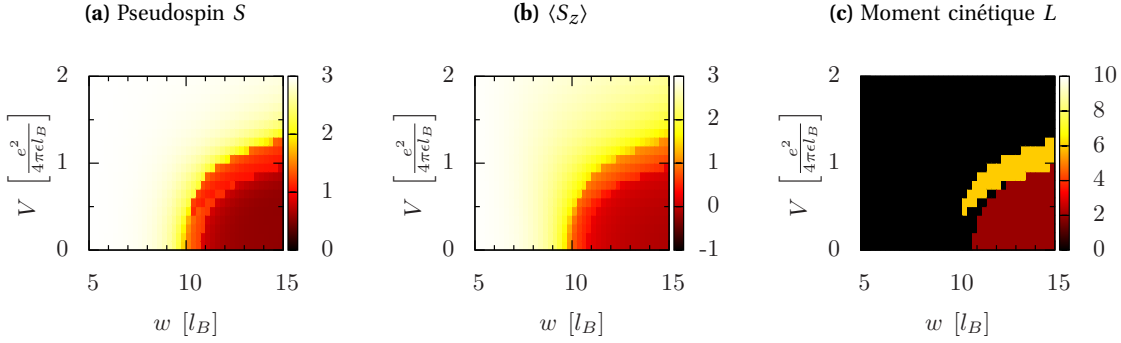


FIGURE 5.22 Norme (a) et composante suivant z (b) du pseudospin, et moment cinétique (c), pour $N = 6$ et $N_B = 13$ à $\nu = 4/11$. Comme pour $\nu = 1/2$ (figures 5.9 et 5.18), l'état fondamental est toujours polarisé selon z . Une transition vers un état inhomogène a lieu aux grandes distances $w \gtrsim 10 l_B$ pour un biais modéré.

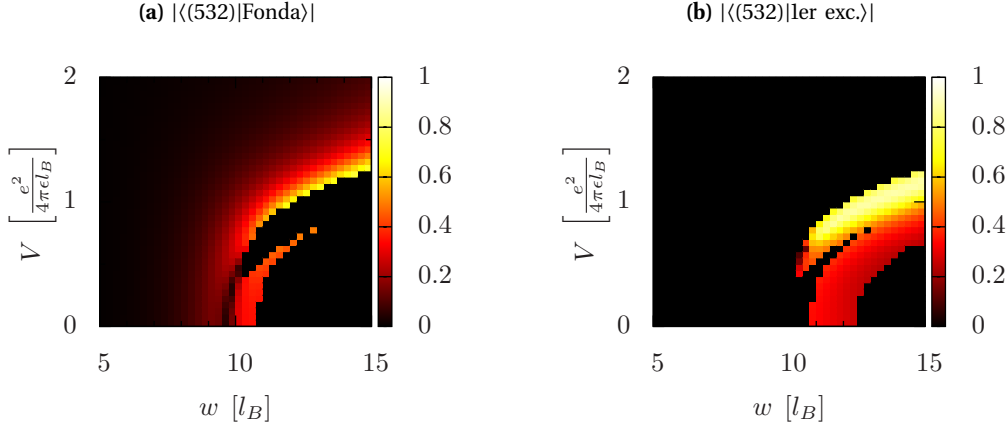


FIGURE 5.23 Recouvrement de l'état (532) avec l'état fondamental (Fonda) et le premier état excité (1er exc.) du puits quantique biaisé pour $N = 6$ électrons et $N_B = 13$ quanta de flux, déterminé par diagonalisation exacte sur la sphère. Le champ magnétique qui fixe le rapport entre l'énergie d'interaction et le gap de sous-bande vaut $B = 11,4$ T ici (cette valeur correspond à $\nu = 4/11$ dans la référence [PST⁺03]).

recouvrement avec l'état (532) est montré sur la figure 5.23b. On voit qu'il existe un domaine ($w \gtrsim 10 l_B$, $V \approx e^2/4\pi\epsilon l_B$) dans lequel le premier état excité a un recouvrement important avec l'état (532), jusque 89%. Notons que l'optimisation est de toute façon superflue ici car l'état (532) est déjà polarisé dans la même direction que l'état fondamental. Le résultat est négatif donc, car dans un puits de largeur raisonnable l'état (532) ne peut être stabilisé, même en présence d'un biais.

Le tracé des gaps (figure 5.24) montre que les deux états sont proches en énergie, particulièrement dans la région de recouvrement élevé de l'état (532) avec le premier état excité. Dans cette région le rapport $\delta\epsilon = (E_{\text{fonda}} - E_{\text{exc}})/E_{\text{fonda}}$ du gap à l'énergie du fondamental est de l'ordre de 10^{-4} (par exemple pour $w/l_B = 12$ et $V/(e^2/4\pi\epsilon l_B) = 1$ on trouve $\delta\epsilon = 0,0015/9,5294 = 1,6 \times 10^{-4}$). On peut alors supposer que la présence d'un état fondamental inhomogène dans cette région (entourée en bleu sur la figure 5.24) est un effet de taille finie, car on a déjà vu dans l'étude à $\nu = 1/2$ de la section 5.2.1 que les états inhomogènes sont exagérément favorisés dans les systèmes de petite taille (figure 5.8). Si cette supposition est vraie l'état de Halperin asymétrique (532) peut être stabilisé par un biais dans un puits large, dans le cas contraire il

est occulté par un état inhomogène.

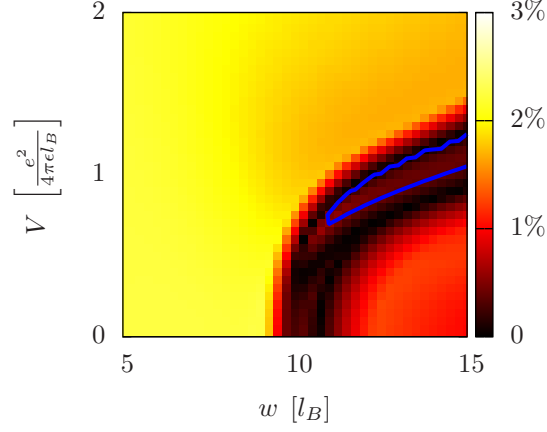


FIGURE 5.24 Gaps entre l'état fondamental et le premier état excité du puits large biaisé pour $N = 6$ et $N_B = 13$. La région entourée en bleu indique un recouvrement supérieur à 75% entre l'état (532) et le premier état excité (voir figure 5.23b).

Les résultats des calculs à six particules ne permettent donc pas de conclure sur la stabilité d'un état de Halperin (532) dans un puits large. Ce fait appelle des calculs sur des systèmes plus grands. Cependant, alors que l'espace de Hilbert du secteur $L_z = 0$ est de dimension

$$\dim(\mathcal{H})(N = 6, L_z = 0) = 16\,424$$

pour $N = 6$, pour la taille supérieure la dimension de l'espace pertinent est

$$\dim(\mathcal{H})(N = 10, L_z = 0) = 195\,735\,170.$$

L'obtention de l'état fondamental est possible pour un système de cette taille, mais il requiert un temps de calcul très important. Pour cette raison je n'ai pas pu prolonger cette étude, la question de la stabilité de l'état (532) dans le puits large biaisé reste donc ouverte. Cependant des indications ont été apportées dans cette section en faveur d'une possible stabilisation de l'état (532) par un biais non-nul du potentiel de confinement. En effet, dans les puits très larges ($w \gtrsim 10l_B$) et pour un biais non-nul ($V \simeq e^2/4\pi\epsilon l_B$) l'état (532) a un recouvrement important, de l'ordre de 90%, avec le premier état excité. Cet état excité est proche en énergie de l'état fondamental inhomogène qui domine dans cette région, mais au vu de l'étude à $\nu = 1/2$ de la section 5.2.1 qui implique jusqu'à 10 particules, on voit que les phases inhomogènes sont exagérément favorisées à taille finie. Ainsi l'état excité – homogène – qui a un large recouvrement avec l'état (532) pour $N = 6$ pourrait être l'état fondamental dans les systèmes de taille supérieure, auquel cas l'état (532) serait stabilisé dans la région du diagramme de phase correspondante.

Conclusion

L'étude qui a motivé la rédaction de ce manuscrit concerne les phases corrélées du système d'électrons bidimensionnel en champ magnétique intense. Ces phases corrélées sont les états d'effet Hall quantique fractionnaire et les cristaux de Wigner, et je me suis concentré sur leur étude dans le dispositif de la bicouche et du puits large, dans lesquels le système d'électrons possède plusieurs composantes qui sont incarnées par les couches dans le premier cas et les sous-bandes dans le second. Dans ces deux systèmes, mon but a été d'identifier l'état fondamental du système d'électrons en fonction des paramètres pertinents, et d'établir les diagrammes de phase correspondants. Dans les cas qui ont été considérés expérimentalement ceci permet d'identifier les phases observées, et dans les situations qui n'ont pas encore été étudiées ceci permet de prédire l'état du système. Pour déterminer ces phases j'ai eu recours à des calculs de diagonalisation exacte qui permettent de connaître l'état fondamental du système pour un faible nombre de particules, à la méthode du Monte-Carlo variationnel qui détermine les énergies des états modèles pour des tailles plus importantes, ainsi qu'à l'approximation de Hartree-Fock pour obtenir l'énergie des cristaux de Wigner. La première méthode donne l'état fondamental du système dont il est parfois difficile d'extraire les propriétés, et elle est plus violemment sujette aux effets de taille finie. Les deux méthodes suivantes, le Monte-Carlo pour les phases liquides et l'approximation Hartree-Fock pour les cristaux de Wigner, permettent de calculer l'énergie d'états candidats avec une grande précision, mais elles sont bien sûr dépendantes de notre capacité à concevoir les phases pertinentes. L'approche exacte et l'approche variationnelle sont complémentaires, néanmoins dans certains cas l'une d'elle s'avère plus adaptée, et s'impose sur l'autre.

Dans la bicouche, un seul paramètre est pertinent, c'est la distance entre les couches. On pourrait imaginer introduire un second paramètre qui décrit l'épaisseur des couches, mais j'ai pu constater que celui-ci s'avère très peu pertinent en pratique. J'ai établi le diagramme de phase de la bicouche à $\nu = 1/2$, $1/3$ et $1/4$ dans les deux plus bas niveaux de Landau, par l'approche variationnelle. Dans tous les cas, un état à une composante est stabilisé aux faibles distances, et un état formé de deux couches indépendantes est favorisé lorsque les couches sont très éloignées. La nature de l'état qui est préféré par le système pour $d \rightarrow \infty$ dépend du facteur de remplissage partiel de chaque couche, pour $\nu_{1\downarrow} \leq 1/6$ c'est un cristal de Wigner alors que pour $\nu_{1\downarrow} = 1/4$ c'est un liquide de Fermi de fermions composites. Dans le régime intermédiaire, le système est réellement multicomposante et un état de Halperin peut être stabilisé dans tous les cas que j'ai considérés ; un état (331) à $\nu = 1/2$, un état (551) à $\nu = 1/3$, et un état (553) à $\nu = 1/4$, et ce dans les deux plus bas niveaux de Landau à l'exception de $\nu = 1/4$ dans le second niveau de Landau, dans lequel les états compressibles sont favorisés. Les états de Halperin sont donc bien pertinents pour l'étude des systèmes multicomposantes, dans la mesure où ils peuvent être stabilisés dans les deux plus bas niveaux de Landau et pour de nombreux facteurs de remplissage.

Le chapitre quatre traite du puits large symétrique. Il est motivé par l'existence d'un diagramme de phase expérimental à $\nu = 1/2$ qui rapporte l'existence de deux phases relativement bien identifiées, le liquide de Fermi de fermions composites dans le régime monocomposante, et l'état de Halperin (331) dans les puits plus larges. En revanche la troisième phase de ce diagramme, qui est une phase isolante, peut être un cristal de Wigner ou un état de localisation individuelle ; peu de travaux permettent de trancher cette question. De plus,

dans le cas où l'état isolant serait un cristal de Wigner, son réseau ainsi que son peuplement des sous-bandes reste à déterminer. C'est ce que j'ai fait dans le quatrième chapitre. En considérant de nombreuses phases potentielles, j'ai pu établir un diagramme de phase théorique qui s'avère être très similaire au diagramme de phase expérimental. Ce diagramme de phase confirme l'identification supposée de la phase métallique à un liquide de Fermi de fermions composites et celle de la phase d'effet Hall quantique à un état de Halperin (331). De plus, sa concordance avec le diagramme de phase expérimental suggère que la phase isolante a bien été identifiée, il s'agit d'un cristal de Wigner rectangulaire qui ne peuple que la première sous-bande excitée. Alors que la littérature avait jusque-là considéré la possibilité de stabiliser un cristal de Wigner alterné dans le puits large, un état qui dépeuple complètement la plus basse sous-bande n'avait jamais été envisagé ; il s'avère que celui-ci a un domaine de stabilité qui est en très bon accord avec celui de la phase isolante observée expérimentalement, et c'est donc un candidat pertinent pour l'identification cette phase qui apparaît dans les puits très larges.

Dans le troisième chapitre, sur la bicouche, j'ai entamé l'étude de l'effet Hall quantique observé à $\nu = 4/11$ dans un puits large. Alors que celui-ci peut-être décrit comme un effet Hall quantique fractionnaire de fermions composites, je propose ici une interprétation alternative en termes d'état de Halperin (532). Cet état a deux composantes et il est asymétrique, il peut résulter de l'existence d'une asymétrie dans le potentiel de confinement du puits large. Afin de tester cette hypothèse j'ai considéré une première modélisation du puits large asymétrique par une bicouche biaisée, dans laquelle l'état (532) s'avère effectivement pouvoir être stabilisé pour une gamme de biais intermédiaires Δ reliés à la distance d par $\Delta \sim d/10$, en unités magnétiques. Cette étude préliminaire encourage donc une investigation plus réaliste dans le cadre du modèle du puits large biaisé, qui est menée dans le chapitre cinq. Celle-ci confirme le résultat préliminaire, offrant ainsi au modèle de la bicouche effective une légitimité, au moins sur le plan qualitatif. Néanmoins, l'étude que j'ai menée sur un système à six particules ne permet pas de conclure de manière indiscutable sur cette question, et une étude approfondie sur un système plus grand permettrait de trancher cette question définitivement.

L'effet du biais dans le potentiel de confinement a été étudié expérimentalement à $\nu = 1/2$, et il a été montré que celui-ci peut être nécessaire pour l'observation de l'effet Hall quantique fractionnaire. La nature de l'état quantique sous-jacent devient alors intrigante. Au vu de ces expériences, la possibilité de stabiliser un état pfaffien de Moore-Read à $\nu = 1/2$ a été avancée dans la littérature. L'étude présentée dans le cinquième chapitre montre qu'il n'en est rien, et en réalité c'est l'état (331) qui permet l'effet Hall quantique fractionnaire, même en présence d'un biais ; cependant pour le voir il est nécessaire de considérer des composantes qui sont formées par une combinaison linéaire adéquate des sous-bandes qui décrit une bicouche effective.

Les deux systèmes qui font l'objet de ce manuscrit n'ont pas été choisis par hasard. Ils sont liés par le fait que la bicouche sert souvent de modèle effectif pour le puits large. Rassembler l'étude de ces deux dispositifs dans un même manuscrit permet de les comparer, et ainsi de tester la validité de cette description effective. Alors que certaines propriétés du système d'électrons dans le puits large sont capturées par le modèle de bicouche, d'autres ne le sont pas. Il est par exemple impossible de prévoir l'existence d'un cristal de Wigner qui ne peuple que la première sous-bande excitée, à $\nu = 1/2$ et dans les puits très large, car le modèle bicouche prévoit deux liquides de Fermi de fermions composites décorrélés aux grandes distances entre les couches. Ainsi, en plus d'être incapable de fournir des critères quantitatifs pour la stabilité des phases, le modèle de bicouche effectif mène parfois à des erreurs qualitatives. L'un des messages qui ressort de ce travail de thèse est qu'une description réaliste des sous-bandes est parfois nécessaire pour comprendre les mécanismes de l'effet Hall quantique fractionnaire dans le dispositif du puits large. Une telle description réaliste est offerte par le modèle du puits infini carré, ou éventuellement biaisé, comme en témoigne la concordance importante entre le diagramme de phase expérimental à $\nu = 1/2$ et le diagramme de phase théorique obtenu à l'aide de ce modèle.

Annexe A

Géométrie sphérique

A.1 Coordonnées sphériques et spinorielles

Les vecteurs de base \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_φ du système de coordonnées sphériques (figure A.1) s'expriment en fonction de leurs homologues en coordonnées cartésiennes selon

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

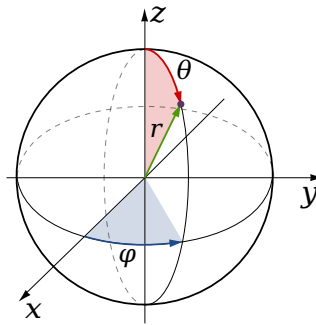


FIGURE A.1 Système de coordonnées sphériques.

Dans ce système de coordonnées, on écrit les opérateurs gradient

$$\nabla = \left(\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\theta, \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi \right) \quad (\text{A.2})$$

et laplacien

$$\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r), \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta), \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi^2 \right). \quad (\text{A.3})$$

A.1.1 Coordonnées spinorielles

L'introduction des coordonnées spinorielles u et v est utile. Celles-ci sont définies par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

et sont reliées au vecteur \mathbf{e}_r par

$$\mathbf{e}_r = (u, v) \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ est le vecteur formé des matrices de Pauli.

A.1.2 Distance de corde

Sur la sphère, il est pratique et usuel dans l'étude de l'effet Hall quantique d'utiliser la distance de corde à la place de la distance d'arc. Contrairement à cette dernière, la distance de corde est simplement reliée aux coordonnées spinorielles qui sont adaptées à la quantification de Landau sur la sphère. Dans cette section j'établis cette expression de la distance de corde entre deux points en termes de leurs coordonnées spinorielles.

Sur la sphère de rayon $R = 1$ les coordonnées s'écrivent

$$\mathbf{r} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta). \quad (\text{A.6})$$

La norme associée à la distance de corde peut être reliée aux coordonnées spinorielles. Soient \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 deux points de la sphère, on a

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = \|\mathbf{r}_1\|^2 + \|\mathbf{r}_2\|^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad (\text{A.7})$$

où

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (\text{A.8})$$

et donc

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = 2(1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2). \quad (\text{A.9})$$

À partir de cette expression on peut obtenir l'identification suivante

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = 4|u_1 v_2 - v_1 u_2|^2, \quad (\text{A.10})$$

obtenue en développant

$$\begin{aligned} |u_1 v_2 - v_1 u_2|^2 &= \left| \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} - \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right|^2 \\ &= \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right)^2 + \left(\cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \right)^2 - 2 \\ &= \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Le potentiel d'interaction Coulombien a donc une expression simple en termes de distance de corde,

$$V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|_{\text{corde}}} = \frac{1}{2R|uv' - u'v|}. \quad (\text{A.12})$$

Cette forme du potentiel Coulombien sera systématiquement substituée à son expression en termes de distance d'arc, attendu que l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire, gouverné par la répulsion à courte distance, n'est pas affecté par la différence à longue distance entre les deux de manière cruciale.

A.2 Projection stéréographique

La projection stéréographique Γ associe à un point P de la sphère l'intersection de la droite qui passe par P et le pôle Nord N avec le plan équatorial (point z sur la figure A.2). Le point ainsi obtenu par projection

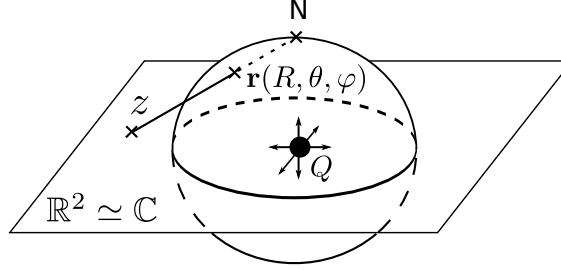


FIGURE A.2 Projection stéréographique.

stéréographique a pour coordonnées complexes

$$z = R \cot \frac{\varphi}{2} e^{i\theta} = R \frac{u}{v}. \quad (\text{A.13})$$

Inversement les coordonnées de la sphère peuvent être déduites de celles du point projeté

$$\varphi = 2 \arctan \frac{R}{|z|} \quad (\text{A.14})$$

$$\theta = \arg z. \quad (\text{A.15})$$

A.3 Monopôle magnétique et quantification du flux

Un monopôle magnétique génère un champ magnétique à symétrie sphérique. La charge Q du monopôle est reliée au champ magnétique B qu'elle engendre à la surface de la sphère de rayon R par

$$2Q = \frac{4\pi R^2 B}{h/e}. \quad (\text{A.16})$$

Montrons que le fait que la fonction d'onde soit monovaluée implique $Q \in \mathbb{Z}/2$. Pour cela on remarque que le champ magnétique généré par le monopôle induit une variation de phase de la fonction d'onde lors d'un déplacement dans l'espace réel. Cette variation de phase est décrite par le potentiel vecteur \mathbf{A} ; pour un chemin \mathcal{C} qui va de \mathbf{a} à \mathbf{b} dans l'espace réel on a

$$\Psi(\mathbf{b}) = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right) \Psi(\mathbf{a}). \quad (\text{A.17})$$

Si le chemin \mathcal{C} décrit une courbe fermée on a alors

$$\exp\left(-i \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right) = 1 \quad (\text{A.18})$$

car la fonction d'onde est monovaluée; ainsi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \in 2\pi \frac{\hbar}{e} \mathbb{Z}. \quad (\text{A.19})$$

On sait d'après le théorème de Stokes que l'intégrale d'un champ de vecteur sur une courbe fermée est égale à l'intégrale de son rotationnel sur une surface \mathcal{S} délimitée par celui-ci, on a donc

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (\text{A.20})$$

Le terme de droite de cette équation n'est autre que le flux du champ magnétique à travers la surface \mathcal{S} , qui vaut $2Q\hbar/e$ d'après l'équation (A.16), et on a donc finalement

$$Q \in \frac{\mathbb{Z}}{2} \quad ; \quad (\text{A.21})$$

ainsi la charge du monopôle ne peut prendre que des valeurs demi-entières si l'on impose que la fonction d'onde soit monovaluée.

Notons que l'on utilise fréquemment la jauge latitudinale [Hal83a]

$$\mathbf{A}_l(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar Q}{eR} \cot\theta \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{A.22})$$

pour décrire le champ magnétique généré par le monopôle. Elle comporte deux singularités aux pôles Nord et Sud.

A.4 Dynamique d'une particule chargée sur la sphère

Le hamiltonien cinétique d'une particule chargée qui se meut sur la sphère s'écrit

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{[\mathbf{r} \wedge (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2}{2mR^2} = \frac{\mathbf{L}^2 - \hbar^2 Q^2}{2mR^2} \quad (\text{A.23})$$

où \mathbf{L} est l'opérateur de moment cinétique. Il est relié à \mathbf{r} et \mathbf{p} par

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \hbar Q \mathbf{e}_r. \quad (\text{A.24})$$

Ainsi les états propres du Hamiltonien sont indicés par les valeurs propres $\hbar^2 l(l+1)$ et $\hbar m$ de \mathbf{L}^2 et L_z , respectivement, où $l, m \in \mathbb{N}/2$. À partir de l'équation (A.23) on voit que le plus bas niveau de Landau correspond à $l = Q$ car cette valeur de l correspond à la plus faible énergie positive possible; ainsi les valeurs propres du moment cinétique vérifient $l \in Q + \mathbb{N}$, $m \in [-l, l]$.

A l'aide des formules suivantes

$$\sin\theta = 2uv \quad \begin{pmatrix} \partial_\theta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\bar{v}\partial_u + \bar{u}\partial_v \\ i(u\partial_u - v\partial_v) \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

qui se déduisent simplement de la définition (A.4), on peut montrer [Gre11] que le moment cinétique s'écrit

$$L_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \sigma_i \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix} \sigma_i^t \begin{pmatrix} \partial_{\bar{u}} \\ \partial_{\bar{v}} \end{pmatrix} \quad ; \quad (\text{A.26})$$

On introduit l'opérateur d'échelle

$$a = \frac{1}{\sqrt{2Q}} (u\partial_{\bar{v}} - v\partial_{\bar{u}}) \quad (\text{A.27})$$

tel que

$$a^\dagger a = \frac{1}{2Q} [|u|^2 \partial_{v\bar{v}} + |v|^2 \partial_{u\bar{u}} - \bar{v}(\partial_{\bar{v}} + u\partial_{u\bar{v}}) - \bar{u}(\partial_{\bar{u}} + v\partial_{v\bar{u}})], \quad (\text{A.28})$$

il permet de réécrire le hamiltonien cinétique

$$H = \frac{\mathbf{L}^2 - \hbar^2 Q^2}{2mR^2} = \frac{\omega_c}{2Q\hbar} (\mathbf{L}^2 - \hbar^2 Q^2) = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.29})$$

Afin de simplifier la détermination des états propres du hamiltonien, on introduit un autre moment cinétique \mathbf{S} dont toutes les composantes commutent avec celles de \mathbf{L} . les états propres de ce Hamiltonien, nommés harmoniques monopolaires, s'écrivent [Gre11]

$$Y_{Qlm}(u, v) = \mathcal{N}_{Qlm} (S^-)^{l-Q} u^{l+m} v^{l-m}, \quad (\text{A.30})$$

où

$$S^- = \bar{v}\partial_u - \bar{u}\partial_v \quad (\text{A.31})$$

est l'opérateur qui associe à une fonction d'onde son équivalent dans le niveau de Landau immédiatement supérieur, sans toutefois changer la valeur de son moment cinétique. La constante de normalisation vaut

$$\mathcal{N}_{Qlm} = \sqrt{\frac{(l+Q)!}{(2l)!(l-Q)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \binom{2l}{l-m}}. \quad (\text{A.32})$$

Une bijection entre les polynômes du plan et leurs équivalents sphériques est donnée par [FOC86]

$$P(z_1, \dots, z_N) \mapsto \left(\prod_{i=0}^N u_i^{2Q} \right) P\left(\frac{u_1}{v_1}, \dots, \frac{u_N}{v_N} \right), \quad (\text{A.33})$$

soit pour les facteurs de Jastrow omniprésents dans l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \mapsto \prod_{i < j} (u_i v_j - v_i u_j)^m. \quad (\text{A.34})$$

A.5 Pseudopotentiels

Pour calculer les coefficients du potentiel d'interaction coulombien dans la base des harmoniques monopolaires, on introduit les états cohérents de paire. Pour une paire de moment cinétique total j , formée de deux électrons ayant chacun un moment cinétique l , l'état cohérent $\psi_{\mathbf{R}}^{l,j}$ centré en \mathbf{R} est l'état propre de $\mathbf{R} \cdot \mathbf{L}_{\text{tot}}$ de valeur propre j , soit

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{L}_{\text{tot}} \psi_{\mathbf{R}}^{l,j} = j \psi_{\mathbf{R}}^{l,j} . \quad (\text{A.35})$$

Dans le plus bas niveau de Landau, une solution de cette équation en représentation spinorielle est donnée par

$$\psi_{\mathbf{R}}^{l,j}(u_1, v_1; u_2, v_2) = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{2l-j} (\bar{\alpha} u_1 + \bar{\beta} v_1)^j (\bar{\alpha} u_2 + \bar{\beta} v_2)^j \quad (\text{A.36})$$

où (α, β) sont les coordonnées spinorielles du centre de masse \mathbf{R} . À partir de cette expression des états cohérents de paire sur la sphère, les pseudopotentiels peuvent être obtenus en calculant la valeur moyenne du potentiel d'interaction dans l'état cohérent centré au pôle Nord

$$V_l^{(n)} = \langle V \rangle_{\psi_N^{l,j}} . \quad (\text{A.37})$$

Le potentiel d'interaction s'écrit

$$V = \sum_{\{m_i\}} \delta_{m_1+m_2}^{m_3+m_4} V_{\{m_i\}} c_{m_1}^\dagger c_{m_2}^\dagger c_{m_4} c_{m_3} \quad (\text{A.38})$$

où les coefficients $V_{\{m_i\}}$ s'écrivent, en termes des pseudopotentiels $V_l^{(n)}$,

$$V_{\{m_i\}} = \langle s, m_1; s, m_2 | V^{(n)} | s, m_3; s, m_4 \rangle \quad (\text{A.39})$$

$$= \sum_{l=0}^{2s} \langle s, m_1; s, m_2 | 2s-l, m_1+m_2 \rangle V_l^{(n)} \langle 2s-l, m_3+m_4 | s, m_3; s, m_4 \rangle . \quad (\text{A.40})$$

Annexe B

Modèle du « Jellium »

B.1 Hamiltonien d'interaction

Un opérateur à deux corps $O^{(2)}$ de l'espace de Fock est défini à partir des opérateurs $O_{i,j}^H$ de l'espace de Hilbert à deux corps par

$$O^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\{n_i\}} \langle n_1, n_2 | O_{i,j}^H | n_3, n_4 \rangle c_{n_1}^\dagger c_{n_2}^\dagger c_{n_4} c_{n_3}, \quad (\text{B.1})$$

où $c_n^{(dg)}$ est l'opérateur d'annihilation (création) d'une particule dans l'état de l'espace à un corps indicé par n . Ainsi, un potentiel d'interaction V à deux corps est traduit dans l'espace de Fock par un hamiltonien d'interaction

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma_i\}} \int d^2 r d^2 r' V_{\sigma_1 \dots \sigma_4}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_{\sigma_4}(\mathbf{r}') \psi_{\sigma_3}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.2})$$

où $\psi_\sigma^{(\dagger)}(\mathbf{r})$ est l'opérateur annihilation (création) d'un électron de (pseudo)spin $\sigma = \uparrow \downarrow$ à la position \mathbf{r} , et où le potentiel V dépend éventuellement du spin. Les relations d'anticommutation

$$\{\psi_\sigma(\mathbf{r}), \psi_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (\text{B.3})$$

permettent de réordonner le produit pour obtenir

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma_i\}} \int d^2 r d^2 r' V_{\sigma_1 \dots \sigma_4}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left[\psi_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{\sigma_3}(\mathbf{r}) \psi_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_{\sigma_4}(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\sigma_2, \sigma_4} \psi_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{\sigma_3}(\mathbf{r}') \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma_i\}} \int d^2 r d^2 r' V_{\sigma_1, \dots, \sigma_4}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho_{\sigma_1 \sigma_3}(\mathbf{r}) \rho_{\sigma_2 \sigma_4}(\mathbf{r}') - \frac{n_{\text{el}}}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \int d^2 r V_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2}(0) \rho_{\sigma_1 \sigma_3}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Le second terme du membre de droite, qui diverge, constitue la partie homogène de l'interaction, on la choisit généralement comme origine de l'énergie, et on a donc

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma_i\}} \int d^2 r d^2 r' V_{\sigma_1 \dots \sigma_4}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho_{\sigma_1 \sigma_3}(\mathbf{r}) \rho_{\sigma_2 \sigma_4}(\mathbf{r}'). \quad (\text{B.5})$$

On peut réexprimer l'idée précédente dans l'espace réciproque, dans lequel

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} v(q) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(q) \left[\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \underbrace{\sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} - N}_{=\rho_{\mathbf{q}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où l'on a introduit l'opérateur nombre d'électrons $N = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \rho_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$.

B.1.1 Approximation du « Jellium »

Si on veut incorporer l'interaction avec les ions du réseau sous-jacent au système électronique, le Hamiltonien devient

$$H = K_{\text{el}} + V_{\text{el-el}} + V_{\text{el-ion}} + V_{\text{ion-ion}} \quad (\text{B.7})$$

où

$$\begin{aligned} V_{\text{el-el}} &= \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(q) \sum_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}',\sigma'} c_{\mathbf{k},\sigma} \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(q) [\rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} - \rho_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$v(q)$, and the electronic density operator :

$$\rho_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma}$$

De manière analogue le terme d'interactions entre les ions s'écrit

$$V_{\text{ion-ion}} = \frac{1}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}} v(q) [n_{-\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}] \quad (\text{B.9})$$

en termes de l'opérateur de densité ionique $n_{\mathbf{q}}$, tandis que le potentiel d'interaction entre les électrons et les ions est donné par

$$V_{\text{el-ion}} = -\frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{q}} v(q) \rho_{-\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Dans l'approximation du Jellium, on néglige les variations spatiales du potentiel cristallin, ainsi on suppose la densité ionique égale à la densité électronique moyenne n de sorte que

$$\rho_{\text{ion}}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} n e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = An \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} \quad (\text{B.11})$$

Le terme d'interaction devient alors

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{el-el}} + V_{\text{el-ion}} + V_{\text{ion-ion}} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(q) [\rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} - N] - \frac{1}{A} v(0) [\rho_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} An] + \frac{1}{2A} v(0) (An)^2 \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} v(q) [\rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} - N] + \underbrace{\frac{v(0)}{2A} [(\rho_{\mathbf{q}=\mathbf{0}})^2 - 2\rho_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} An + A^2 n^2]}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

En résumé, dans l'approximation du Jellium le rôle du réseau ionique sous-jacent au système d'électrons se limite à annuler la partie homogène ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) du potentiel d'interaction électronique,

$$V = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} v(q) [\rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} - \rho_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}] \quad (\text{B.13})$$

Annexe C

Méthode du Monte-Carlo variationnel pour le calcul des énergies des états de Hall

On veut déterminer la valeur moyenne d'un hamiltonien H dans un état d'essai Ψ . Dans la représentation position cette valeur moyenne s'écrit

$$E = \langle H \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \quad (\text{C.1})$$

où la constante de normalisation vaut

$$\mathcal{N} = \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2. \quad (\text{C.2})$$

Le hamiltonien de notre problème est réduit au potentiel d'interaction effectif déterminé à partir du potentiel de Coulomb, dont l'expression dans la représentation position est donnée par

$$H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i < j \leq N} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (\text{C.3})$$

Les intégrales intervenant dans les expressions (C.1) et (C.2) peuvent être évaluées par la méthode dite du « Monte-Carlo variationnel ».

C.1 Algorithme de Metropolis

La méthode Monte-Carlo, développée par von Neumann et Ulam en 1950 [vNU51], consiste à échantillonner une loi de probabilité $p(x)$ afin d'évaluer la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$. L'échantillonnage permet de remplacer l'intégrale par une somme sur l'ensemble $\{x_i\}$ des échantillons sélectionnés pour représenter la distribution de probabilité

$$\int dx p(x) f(x) \xrightarrow{\text{échantillonnage}} \sum_{x_i} p(x_i) f(x_i). \quad (\text{C.4})$$

Une méthode d'échantillonnage particulièrement efficace est fournie par l'algorithme de Metropolis [MRR⁺53]. Dans celui-ci l'ensemble des échantillons est produit par une chaîne de Markov, c'est-à-dire une séquence de points $\{x_i\}$, générée à partir d'un point initial x_1 , dans laquelle la valeur x_{i+1} d'un point de la séquence dépend de la valeur du point x_i du point précédent. Plus précisément, un point x_{i+1} est ajouté à la séquence $\{x_i\}$ avec une probabilité

$$\pi(x_i, x_{i+1}) = \min\left(1, \frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right); \quad (\text{C.5})$$

c'est-à-dire que le point suivant x_i dans la séquence est ajouté de manière certaine si la probabilité de la nouvelle configuration x_{i+1} est supérieure à celle de la configuration x_i , et qu'il est ajouté avec une probabilité $p(x_{i+1})/p(x_i)$ sinon.

Cette séquence a l'avantage de visiter l'ensemble de l'espace des configurations, autrement dit elle vérifie la condition d'ergodicité

$$\forall x, y \quad \exists n \quad \pi^n(x, y) \neq 0. \quad (\text{C.6})$$

Elle vérifie de plus la condition de bilan détaillé

$$p(x_i, x_{i+1})\pi(x_{i+1}) = p(x_{i+1}, x_i)\pi(x_i) \quad (\text{C.7})$$

qui est nécessaire pour produire un échantillonnage fidèle à la loi de probabilité $p(x)$ [Kra06].

En appliquant cet algorithme à la loi de probabilité $|\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2$, on peut déterminer les intégrales (C.1) et (C.2), et ainsi connaître l'énergie du hamiltonien dans l'état d'essai.

C.2 Interactions effectives

Le calcul Monte-Carlo fait intervenir un nombre important d'évaluations du potentiel d'interaction dans l'espace réel; dans le cas où le calcul du potentiel d'interaction est numériquement onéreux, on l'approximera par un potentiel d'interaction ayant une forme plus simple, mais qui reproduira correctement les pseudopotentiels de l'interaction d'origine.

C.2.1 Bicouche dans le INL

Le potentiel d'interaction projeté dans le INL s'écrit

$$\begin{aligned}
 V_1(r) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} v_1(q) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\
 &= \int \frac{dq}{2\pi} v_1(q) J_0(qr) \\
 &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} \left[(r^4 - 2r^2 + 6) I_0\left(\frac{r^2}{4}\right) - r^4 I_1\left(\frac{r^2}{4}\right) \right] ;
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

les fonctions I_n étant les fonctions de Bessel modifiées. Le potentiel d'interaction coulombien inter-couches projeté dans le INL n'a quant à lui pas d'expression analytique simple. On choisit pour l'interaction effective la forme

$$V_{\text{eff}}^{\uparrow\uparrow}(r) = \frac{1}{r} + \sum_{k=1}^M c_k^{\uparrow\uparrow} r^{2k} e^{-r^2} \tag{C.9}$$

$$V_{\text{eff}}^{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \sum_{k=1}^M c_k^{\uparrow\downarrow} r^{2k} e^{-r^2} \tag{C.10}$$

Les coefficients $c_k^{\sigma\sigma'}$ sont déterminés par la contrainte selon laquelle les M premiers pseudopotentiels du potentiel d'interaction initial sont égaux aux M premiers pseudopotentiels de l'interaction effective.

C.2.2 Puits quantique

Soient φ_σ les deux premiers états propres du puits carré infini de largeur w . Les potentiels effectifs correspondants s'écrivent

$$V_{\text{eff}}^{\sigma\sigma'}(r) = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz' \frac{|\varphi_\sigma(z)|^2 |\varphi_{\sigma'}(z')|^2}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{C.11}$$

Les pseudopotentiels associés sont donnés par

$$V_m^{\sigma\sigma'} = \int d\mathbf{r} |\phi_m(\mathbf{r})|^2 V_{\text{eff}}^{\sigma\sigma'}(r) \tag{C.12}$$

où

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{4\pi m! 4^m}} z^m e^{-\frac{|z|^2}{8}} \tag{C.13}$$

désigne les orbitales de Landau de paire. Une interversion des intégrales permet de réécrire l'expression précédente

$$V_m^{\sigma\sigma'} = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dz' |\varphi_\sigma(z)|^2 |\varphi_{\sigma'}(z')|^2 V_{m,\text{bicouche}}^{\sigma\sigma'}(z - z') \tag{C.14}$$

où

$$V_{m,\text{bicouche}}^{\sigma\sigma'}(d) = \int d\mathbf{r} \frac{|\phi_m(\mathbf{r})|^2}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \frac{1}{2} U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m, \frac{d^2}{4}\right) \tag{C.15}$$

désigne les pseudopotentiels de la bicouche de distance d .

Une interaction effective plus pertinente pour le puits quantique se présente sous la forme polynomiale

$$V_{\text{eff}}^{\sigma\sigma'}(r) = \frac{1}{R} \left[\frac{c_{-1}^{\sigma\sigma'}}{r/R} + \sum_{k=0}^{N_\phi} c_k^{\sigma\sigma'} \left(\frac{r}{R}\right)^k \right] , \tag{C.16}$$

où R est le rayon de la sphère sur laquelle on réalise le calcul Monte-Carlo. Les coefficients polynomiaux $c_k^{\sigma\sigma}$ sont choisis de telle sorte que les pseudopotentiels associés

$$V_m^{(k)} = 2^k \frac{(2Q+1)!^2}{(2Q-m)!(2Q+m+1)!\Gamma(2Q+2+k/2)} \sum_{j=0}^m \frac{(m+j)!\Gamma(2Q-j+k/2+1)}{(m-j)!j!} \quad (\text{C.17})$$

soient égaux aux pseudopotentiels de l'interaction du puits carré.

C.3 Énergie de référence

On choisit pour énergie de référence dans le modèle du Jellium l'énergie d'interaction électrostatique d'un fond uniforme de densité n qui égale la densité électronique moyenne, plus celle du fond uniforme avec le liquide électronique homogène. Sur la sphère de rayon R celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned} E_{\text{ref.}} &= E_{\text{ion-ion}} - E_{\text{el-ion}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{N^2}{2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta V_{\text{eff.}}(r(\theta)) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

où $r(\theta) = 2R \sin(\theta/2)$ est la distance de corde qui sépare le pôle Nord d'un point de colatitude θ .

C.3.1 Bicouche

Le cas de l'interaction Coulombienne d'un système bicouche

$$\begin{aligned} V_{\uparrow\uparrow} &= V_{\downarrow\downarrow} = \frac{1}{r} \\ V_{\uparrow\downarrow} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

correspond à une énergie de référence intra-couches

$$E_{\text{Coulomb}}^{\uparrow\uparrow} = -\frac{N_{\uparrow}^2}{4} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{2R \sin \frac{\theta}{2}} = -\frac{N_{\uparrow}^2}{8R} 2 \int_0^1 du = -\frac{N_{\uparrow}^2}{2R} \quad (\text{C.20})$$

et une énergie de référence inter-couches

$$E_{\text{Coulomb}}^{\uparrow\downarrow} = -\frac{N_{\uparrow}N_{\downarrow}}{4} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + d^2}} = -\frac{N_{\uparrow}N_{\downarrow} \left(\sqrt{4R^2 + d^2} - d\right)}{4R^2} \quad (\text{C.21})$$

et donc à une énergie de référence totale

$$E_{\text{Bicouche}} = -\frac{N_{\uparrow}^2 + N_{\downarrow}^2}{2R} - \frac{N_{\uparrow}N_{\downarrow}}{2R} \frac{\sqrt{4R^2 + d^2} - d}{R}. \quad (\text{C.22})$$

C.3.2 Interaction effective gaussienne

Les termes gaussiens de la forme $r^{2k} \exp(-r^2)$ apportent une contribution à l'énergie de référence

$$\begin{aligned} E_{\text{Gauss}}^{\sigma\sigma'} &= -\frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^{2k} e^{-\left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{4R^2} \int_0^{2R} du u^{2k+1} e^{-u^2} = -\frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{8R^2} [\Gamma(1+k) - \Gamma(1+k, 4R^2)] \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

où $\Gamma(x, y)$ est la fonction Gamma incomplète.

Au final l'énergie de référence d'une interaction effective du type

$$V_{\text{Gauss}}^{\sigma\sigma'}(r) = \left[\frac{1}{r} + \sum_k c_k^{\uparrow\uparrow} r^{2k} e^{-r^2} \right] \delta_{\sigma, \sigma'} + \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \sum_k c_k^{\uparrow\downarrow} r^{2k} e^{-r^2} \right] \delta_{-\sigma, \sigma'} \quad (\text{C.24})$$

s'écrit, pour $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$,

$$E_{\text{Gauss.}}^{\text{ref.}} = -\frac{N^2}{8R} \left\{ 2 + \frac{1}{R} (\sqrt{4R^2 + d^2} - d) + \frac{1}{2R} \sum_k (c_k^{\uparrow\uparrow} + c_k^{\uparrow\downarrow}) [\Gamma(1+k) - \Gamma(1+k, 4R^2)] \right\}. \quad (\text{C.25})$$

C.3.3 Interaction effective polynomiale

Les termes d'interaction proportionnels à r^k contribuent à l'énergie de référence selon

$$\begin{aligned} E_{\text{Poly.}}^{\sigma\sigma'} &= -\frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^k \\ &= -\frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{4R^2} \int_0^{2R} du u^{k+1} = -\frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{2} \frac{(2R)^k}{k+2}, \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

de sorte que l'énergie de référence pour une interaction du type

$$V_{\text{Poly.}}^{\sigma\sigma'}(r) = \frac{c_{-1}^{\sigma\sigma'}}{r} + \sum_{k=0}^{N_\phi} c_k^{\sigma\sigma'} r^k \quad (\text{C.27})$$

est donnée par

$$E_{\text{Poly.}}^{\text{ref.}} = -\sum_{\sigma, \sigma'} \frac{N_\sigma N_{\sigma'}}{2} \sum_k c_k^{\sigma\sigma'} \frac{(2R)^k}{k+2}. \quad (\text{C.28})$$

Annexe D

Corrections à l'énergie du cristal de Wigner dues au recouvrement des états voisins

D.1 Préliminaire : L'état à deux électrons

Un état cohérent normé du plus bas NL localisé autour de \mathbf{R} s'écrit

$$\Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{2}(yX - xY)} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{R})^2}{4}}. \quad (\text{D.1})$$

Avant d'écrire l'état à deux électrons localisés en $\mathbf{0}$ et $\mathbf{R} = R_0 \mathbf{e}_x$, il convient de noter que les deux états impliqués ne sont pas orthogonaux ($\langle \mathbf{0} | \mathbf{R} \rangle \neq 0$), ainsi en notant

$$|\mathbf{0}, \mathbf{R}\rangle = \mathcal{N} (|\mathbf{0}\rangle \otimes |\mathbf{R}\rangle - |\mathbf{R}\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle) \quad (\text{D.2})$$

l'état à deux corps normalisé et anti-symétrisé, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{0}, \mathbf{R} | \mathbf{0}, \mathbf{R} \rangle &= \mathcal{N}^2 (2 \langle \mathbf{0} | \mathbf{0} \rangle \langle \mathbf{R} | \mathbf{R} \rangle - 2 \langle \mathbf{0} | \mathbf{R} \rangle \langle \mathbf{R} | \mathbf{0} \rangle) \\ &= 2\mathcal{N}^2 (1 - |\langle \mathbf{0} | \mathbf{R} \rangle|^2) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

or le dernier terme, nul pour des états orthogonaux, vaut ici

$$\langle \mathbf{0} | \mathbf{R} \rangle = \int d^2\mathbf{r} \Psi_{\mathbf{0}}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = e^{-\frac{R^2}{4}}. \quad (\text{D.4})$$

Ainsi le facteur de normalisation vaut

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right)}}, \quad (\text{D.5})$$

de sorte que l'état à deux électrons localisés en $\mathbf{0}$ et \mathbf{R} s'écrit

$$\Psi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{N} \det \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{r}_1) & \Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_1) \\ \Psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{r}_2) & \Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right)}} \frac{1}{2\pi} \left[e^{-\frac{r_1^2}{4}} e^{\frac{i}{2}y_2 R_0 - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2}{4}} - e^{-\frac{r_2^2}{4}} e^{\frac{i}{2}y_1 R_0 - \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})^2}{4}} \right]. \quad (\text{D.6})$$

La densité de cet état est donnée par

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}) &= \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \rangle = 2 \int |\Psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_2 \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[e^{-\frac{r^2}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2}{2}} + e^{-\frac{r_2^2}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{2}} - 2 \cos\left(\frac{(y - y_2)R_0}{2}\right) e^{-\frac{r^2 + r_2^2}{4}} e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{4}} e^{-\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2}{4}} \right] d\mathbf{r}_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right)} \left[e^{-\frac{r^2}{2}} + e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{2}} - 2 \cos\left(\frac{yR_0}{2}\right) e^{-\frac{r^2}{4}} e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{4}} \underbrace{\int e^{-\frac{x_2^2 + (x_2 - R_0)^2}{4}} dx_2}_{=\sqrt{2\pi} \exp(-R_0^2/8)} \underbrace{\int \cos\left(\frac{y_2 R_0}{2}\right) e^{-\frac{y_2^2}{2}} dy_2}_{=\sqrt{2\pi} \exp(-R_0^2/8)} \right].
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Ainsi en notant

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}} \frac{1}{2\pi} \left[e^{-\frac{r^2}{2}} + e^{-\frac{(\mathbf{r} - R_0 \mathbf{e}_x)^2}{2}} \right] \tag{D.8}$$

et

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}} \frac{2}{2\pi} \cos\left(\frac{yR_0}{2}\right) e^{-\frac{(\mathbf{r} - \frac{R_0}{2} \mathbf{e}_x)^2}{2}} e^{-\frac{3R_0^2}{8}}, \tag{D.9}$$

On a $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r})$. Afin de calculer l'énergie d'interaction de cet état dans l'approximation de Hartree-Fock j'exprime la densité dans l'espace réciproque,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_0(\mathbf{q}) &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}} \iint \rho_0(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} d\mathbf{r} \\
 &= e^{-\frac{q^2}{2}} [1 + e^{iq_x R_0}] = e^{-\frac{iq_x R_0}{2}} e^{-\frac{q^2}{2}} \cos\left(\frac{q_x R_0}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

et

$$\begin{aligned}
 \delta\tilde{\rho}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}} \iint \delta\rho(\mathbf{r}) e^{-i(xq_x + yq_y)} dx dy \\
 &= -2e^{-\frac{i}{2}q_x R_0} e^{-\frac{R_0^2}{2}} e^{-\frac{q^2}{2}} \cosh\left(\frac{q_y R_0}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

La généralisation à l'état formé de deux états cohérents localisés en des positions arbitraires \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \mathcal{N} \det \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_1) & \Psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_1) \\ \Psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_2) & \Psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_2) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \left[e^{\frac{i}{2}\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1)^2}{4}} e^{\frac{i}{2}\mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{r}_2 - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_2)^2}{4}} - (\mathbf{R}_2 \leftrightarrow \mathbf{R}_1) \right],
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

où $\delta R = \|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|$ est la distance entre les deux centres des états cohérents, donne

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=1,2} e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)^2}{2}} - 2 \cos\left(\frac{1}{2}\delta\mathbf{R} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{R})\right) e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{2}} e^{-\frac{3\delta R^2}{8}} \right]. \tag{D.13}$$

où $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)/2$ et $\delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. Cette densité est tracée sur la figure D.1 pour un état à deux électrons localisés en $\mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{R}_2 = 2\mathbf{e}_x$.

La transformée de Fourier est donnée par $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 + \delta\tilde{\rho}$ où

$$\tilde{\rho}_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_{i=1,2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_i} \tag{D.14}$$

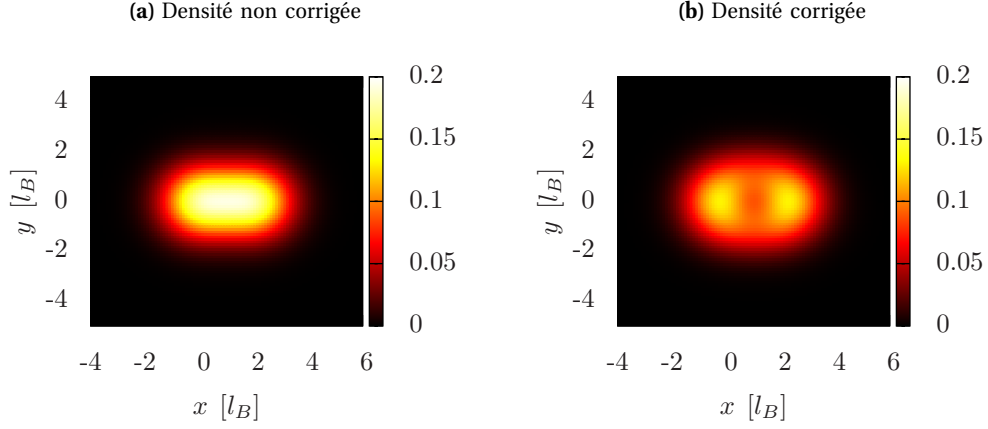


FIGURE D.1 Corrections à la densité du cristal de Wigner dues au recouvrement des états voisins, localisés en $\mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{R}_2 = 2\mathbf{e}_x$. La figure de gauche montre la densité non corrigée à titre de comparaison.

et

$$\begin{aligned}
 \delta\tilde{\rho}(\mathbf{q}) &= -\frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} \frac{2}{2\pi} e^{-\frac{3\delta R^2}{8}} \iint d\mathbf{u} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{R})} \cos\left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \wedge \delta \mathbf{R}\right) e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{2}} \\
 &= -\frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} \frac{1}{2\pi} e^{-3\frac{\delta R^2}{8}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \left[\iint e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{2} + i\mathbf{u} \wedge \frac{\delta \mathbf{R}}{2} - i\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}} d\mathbf{u} + \iint e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{2} - i\mathbf{u} \wedge \frac{\delta \mathbf{R}}{2} + i\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}} d\mathbf{u} \right] \\
 &= -\frac{2}{1 - e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} e^{-\frac{\delta R^2}{2}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} e^{-\frac{q^2}{2}} \cosh\left(\frac{1}{2} \mathbf{q} \wedge \delta \mathbf{R}\right).
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Cette correction est donc proportionnelle à $e^{-\delta R^2/2}$, et elle est généralement négligeable par rapport au terme $\tilde{\rho}_0$ lorsque les deux sites \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 sont éloignés de plusieurs longueurs magnétiques, car

$$\delta\tilde{\rho}(\mathbf{q})/\tilde{\rho}_0(\mathbf{q}) \propto e^{-\delta R^2/2}.$$

D.2 Généralisation à N -corps

Le cristal de Wigner à N électrons a pour fonction d'onde

$$\Psi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \mathcal{N}_N \det(\Psi_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}_j)) = \mathcal{N}_N \sum_{p \in \sigma_N} \text{sgn}(p) \prod_{i=1}^N \Psi_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}_{p(i)}),$$

où \mathbf{R}_i sont les N sites du réseau cristallin et \mathcal{N}_N est un facteur de normalisation. La densité correspondante vaut

$$\begin{aligned}
 \rho_N(\mathbf{r}_1) &= N! \int \dots \int |\Psi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N \\
 &= \mathcal{N}_N \times N! \times \sum_{p, p' \in \sigma_N} \text{sgn}(p) \times \text{sgn}(p') \int \dots \int \prod_{i,j=1}^N \Psi_{\mathbf{R}_i}^*(\mathbf{r}_{p(i)}) \Psi_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_{p'(j)}) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N.
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

L'approximation qui est généralement faite à ce stade consiste à supposer que les termes

$$\int \Psi_{\mathbf{R}_\alpha}^*(\mathbf{r}_i) \Psi_{\mathbf{R}_\beta}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \propto \delta_{\alpha,\beta}$$

sont négligeables si $\alpha \neq \beta$, autrement dit on néglige habituellement le recouvrement entre états localisés sur des sites différents \mathbf{R}_α et \mathbf{R}_β car leurs densités de probabilité décroissent exponentiellement avec la distance. Dans cette approximation la densité (D.16) est réduite à

$$\rho_N(\mathbf{r}_1) = \sum_{p \in \sigma_N} \prod_{i=1}^N \int \dots \int |\Psi_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}_{p(i)})|^2 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N = \sum_{i=1}^N |\Psi_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r})|^2 ; \quad (\text{D.17})$$

cette densité est égale à la densité d'un état produit

$$\Psi_{\text{prod.}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \Psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_1) \Psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_2) \dots \Psi_{\mathbf{R}_N}(\mathbf{r}_N),$$

qui, bien qu'il ne soit pas antisymétrique, a un recouvrement important avec l'état fermionique réel (D.16).

Aux densités projetées importantes $\bar{v} \simeq 1/2$ cette approximation qui néglige le recouvrement entre états localisés voisins n'est plus valable, surtout pour les cristaux anisotropes tels que le cristal de Wigner rectangulaire et le cristal de Wigner rhombique, dans lesquels les sites voisins sont parfois très proches ($\sim 2l_B$). Alors qu'il serait extrêmement fastidieux de prendre en compte l'intégralité des termes qui apparaissent dans l'expression (D.16) de la densité, on peut aller légèrement au-delà de l'approximation dans laquelle on néglige le recouvrement entre états localisés premiers voisins, et ne négliger que le recouvrement entre *seconds* voisins et plus. Dans cette approximation moins restrictive, on suppose que les termes

$$\int \Psi_{\mathbf{R}_\alpha}^*(\mathbf{r}_i) \Psi_{\mathbf{R}_\beta}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i$$

sont non nuls si $\alpha = \beta$, comme précédemment, mais également si \mathbf{R}_α et \mathbf{R}_β sont des sites premiers voisins. Les intégrales impliquées dans le calcul de ces derniers termes peuvent être déduites du calcul mené sur l'état à deux corps dans la section précédente. La transformée de Fourier de la densité de l'état à N électrons s'écrit

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 - 2e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} e^{-\frac{q^2}{2}} \left\{ \underbrace{\sum_i e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i}}_{=\sum_j \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}_j)} - 2 \sum_{\langle m, n \rangle} e^{-\frac{\delta \mathbf{R}^2}{2}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \cosh\left(\frac{1}{2} \mathbf{q} \wedge \delta \mathbf{R}\right) \right\}, \quad (\text{D.18})$$

où $\langle m, n \rangle$ désigne la sommation sur les sites premiers voisins entre eux, de coordonnées relatives $\delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n$ et de centre de masse $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_m + \mathbf{R}_n)/2$, et où \mathbf{Q}_j sont les vecteurs du réseau réciproque. Le terme de normalisation $1/(1 - 2e^{-\frac{\delta R^2}{2}})$ a été déterminé de manière *ad hoc*, en imposant $\iint \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \tilde{\rho}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) = N$.

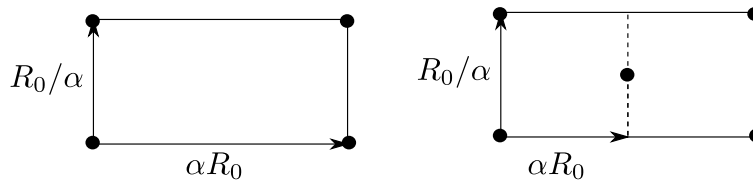


FIGURE D.2 Maille élémentaire des réseaux rectangulaire et rhombique.

Corrections au cristaux de Wigner rectangulaire et rhombique Je détermine d'abord les corrections pour les cristaux de Wigner rectangulaire et rhombique, car pour les autres réseaux particuliers les sites premiers voisins sont suffisamment éloignés pour les négliger. En effet, pour le réseau carré on a

$$\delta R = \sqrt{2\pi/v} \leq \sqrt{4\pi} \simeq 3,54 l_B \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\tilde{\rho}_0(\mathbf{q})} \propto e^{-\delta R^2/2} \leq 0,002$$

et pour le réseau triangulaire cette correction est encore plus faible car les premiers voisins sont plus éloignés ($\delta R = \sqrt{4\pi/\sqrt{3}}v$).

Dans le cristal de Wigner rectangulaire, considérons d'abord les paires de sites appariées selon y , pour lesquelles on a $\delta \mathbf{R} = \delta Y \mathbf{e}_y = R_0 \mathbf{e}_y / \alpha$, où α est le paramètre de dilatation du réseau. Ainsi en notant les centres de masse des paires

$$\mathbf{R}_{jk} = j\delta X \mathbf{e}_x + \left(k + \frac{1}{2}\right) \delta Y \mathbf{e}_y \quad \{j, k\} \in \mathbb{Z}^2 \quad (\text{D.19})$$

on a

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\rho}(\mathbf{q}) &= -\frac{2}{1 - 2e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} e^{-\frac{q^2}{2}} e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \cosh\left(\frac{q_x R_0}{2\alpha}\right) \sum_{j,k} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \\ &= -\frac{2}{1 - 2e^{-\frac{\delta R^2}{2}}} e^{-\frac{q^2}{2}} e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \cosh\left(\frac{q_x R_0}{2\alpha}\right) \underbrace{\sum_j e^{-ij\alpha R_0}}_{=\sum_{Q_x} \delta(q_x - Q_x)} \underbrace{\sum_k e^{-iq_y(k+1/2)\delta Y}}_{=e^{-iq_y\delta Y/2} \sum_{Q_y} \delta(q_y - Q_y)} \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

où les Q_x et Q_y sont définis par

$$Q_x j \alpha R_0 = 2\pi n \quad \Longleftrightarrow \quad Q_x = n \frac{2\pi}{\alpha R_0} = \frac{2\pi}{\alpha R_0} n \quad (\text{D.21})$$

et

$$Q_y = \frac{2\pi}{\delta Y} m. \quad (\text{D.22})$$

Finalement la correction à la densité dans l'espace réciproque est donnée par

$$\delta \tilde{\rho}(\mathbf{q}) = -\frac{2}{1 - 2e^{-\frac{\delta Y^2}{2}}} e^{-\frac{q^2}{2}} e^{-iq_y \delta Y/2} e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \cosh\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) \sum_{\mathbf{Q}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}), \quad (\text{D.23})$$

et le terme qui apparaît dans l'énergie devient

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{q}) \rangle|^2 &= e^{-q^2} \sum_{\mathbf{Q}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \\ &\longrightarrow e^{-q^2} \left[1 - 4 \cos\left(\frac{\delta Y}{2} q_y\right) e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \cosh\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) + 4 e^{-\delta Y^2} \cosh^2\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) \right] \frac{1}{\left(1 - 2e^{-\frac{\delta R^2}{2}}\right)^2} \sum_{\mathbf{Q}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Si l'on prend également en compte les sites appariés dans la direction x , la correction à la densité projetée devient

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\rho}(\mathbf{q}) &= -e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_{\mathbf{Q}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \left\{ \frac{2}{1 - 2e^{-\frac{\delta Y^2}{2}}} e^{-iq_y \delta Y/2} e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \cosh\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{1 - 2e^{-\frac{\delta X^2}{2}}} e^{-iq_x \delta X/2} e^{-\frac{\delta X^2}{2}} \cosh\left(\frac{\delta X}{2} q_y\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

et donc la densité au carré qui intervient dans l'expression s'écrit

$$\begin{aligned}
|\langle \tilde{\rho}(\mathbf{q}) \rangle|^2 &= \frac{1}{\left(1 - 2 \left(e^{-\frac{\delta X^2}{2}} + e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \right)\right)^2} \sum_{\mathbf{Q}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) e^{-q^2} \\
&\quad \left\{ 1 - 4 \left[e^{-\frac{\delta Y^2}{2}} \cos\left(\frac{\delta Y}{2} q_y\right) \cosh\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) + e^{-\frac{\delta X^2}{2}} \cos\left(\frac{\delta X}{2} q_x\right) \cosh\left(\frac{\delta X}{2} q_y\right) \right] \right. \\
&\quad + 4 \left[e^{-\delta Y^2} \cosh^2\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) + e^{-\delta X^2} \cosh^2\left(\frac{\delta X}{2} q_y\right) \right] \\
&\quad \left. + 8 e^{-\frac{\delta X^2 + \delta Y^2}{2}} \left[\cos\left(q_x \frac{\delta Y}{2} - q_y \frac{\delta X}{2}\right) \cosh\left(\frac{\delta Y}{2} q_x\right) \cosh\left(\frac{\delta X}{2} q_y\right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Annexe E

Glossaire

TABLE E.1 Glossaire : tableau des notations, abréviations, sigles et acronymes utilisés dans ce manuscrit.

Sigle	Signification
2-LFFCs	état formé de deux LFFCs indépendants
alt.	alterné (réseau)
coh.	énergie de cohésion
CW	Cristal de Wigner
CWC	Cristal de Wigner corrélé
EHQE	Effet Hall quantique entier
EHQF	Effet Hall quantique fractionnaire
HR	état de Haldane-Rezayi
LFFC	liquide de Fermi de fermions composite
NL	Niveau de Landau
PBNL	Plus bas niveau de Landau
Pf	état pfaffien
2NL	Second (plus bas) niveau de Landau
rect.	rectangulaire (réseau)
rhomb.	rhombique (réseau)
SBE	Système bidimensionnel d'électrons
triang. ou tr.	triangulaire (réseau)

Symbole	Signification
A	Aire ou potentiel vecteur
B	Champ magnétique
Δ	Gap ou gap de sous-bande
l_B	Longueur magnétique
N	Nombre d'électrons
N_B	Nombre de quanta de flux
n	Niveau de Landau
$n_{\text{él.}}$	Densité électronique
ν	Facteur de remplissage
$\bar{\nu}$	Facteur de remplissage partiel
$\bar{\rho}$	Opérateur densité projeté
ϕ_0	Quantum de flux ($\phi_0 = h/e$)
w	Largeur du puits quantique
ω_c	Pulsation cyclotron ($\omega_c = eB/m$)

Annexe F

Formulaire

Je rappelle dans cette annexe quelques relations utiles. Relation entre les unités d'énergie :

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} = 11605 \text{ K} \\ 1 \text{ J} &= 7,25 \times 10^{22} \text{ K} = 6,25 \times 10^{18} \text{ eV} \\ 1 \text{ K} &= 8,6 \times 10^{-5} \text{ eV} = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Énergie cyclotron :

$$\begin{aligned} E_c = \hbar \omega_c &= \hbar \frac{eB}{m} = 1,34 \times \frac{m_0}{m^*} \times B(\text{T}) \text{ K} \\ &= 0,115 \times \frac{m_0}{m^*} \times B(\text{T}) \text{ meV} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Énergie d'interaction coulombienne typique :

$$\begin{aligned} V = \frac{e^2}{\epsilon l_B} |_G &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{\hbar/eB}} |_{SI} = 652 \times \sqrt{B(\text{T})}/\epsilon \text{ K} \\ &= 55.9 \times \sqrt{B(\text{T})}/\epsilon \text{ meV} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Énergie Zeeman (écart entre deux niveaux consécutifs) :

$$\begin{aligned} E_z = 2 \times \mu_B g B S_z &= 0,672 \times g B(\text{T}) \text{ K} \\ &= 0,058 \times g B(\text{T}) \text{ meV} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Niveaux d'énergie d'un puits carré infini de largeur w :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \times \frac{n^2}{w^2} \quad \text{et} \quad \psi_n(z) = \frac{2}{w} \sin\left(n\pi \frac{z}{w}\right) \quad (\text{F.5})$$

Gap de sous-bande :

$$\begin{aligned} \Delta_{SAS} = E_2 - E_1 &= 130848 \times \frac{m_0/m^*}{w^2(\text{nm})} \text{ K} \\ &= 1128 \times \frac{m_0/m^*}{w^2(\text{nm})} \text{ meV} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Grandeurs caractéristiques

Rayon de Bohr :

$$a_B^* = \frac{4\pi\epsilon\hbar^2}{me^2} \simeq \epsilon \times \frac{m}{m^*} \times 52,9 \text{ pm} \quad (\text{F.7})$$

Longueur magnétique :

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = \frac{25,65564 \text{ nm}}{\sqrt{B(T)}} \quad \text{sur la sphère : } l_B = \frac{R}{\sqrt{Q}} \quad (\text{F.8})$$

Quantum de flux :

$$\Phi_0 = \frac{h}{e} \simeq 2,0678 \times 10^{-15} \text{ Tm}^2 \quad , \quad B = n_\Phi \Phi_0 = N_\Phi \Phi_0 / S \quad (\text{F.9})$$

Constante de von Klitzing :

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25,812.807449(86) \quad \Omega \quad (\text{F.10})$$

Valeurs caractéristiques de GaAs

Dans l'arséniure de gallium la masse effective m , la constante diélectrique relative ϵ , et le facteur g sont donnés par

$$m/m_0 \simeq 0,067 \quad , \quad \epsilon \simeq 12,9 \quad , \quad g \simeq -0,44 \quad \text{et} \quad n_{\text{él.}} \sim 10^{15} \text{m}^{-2} \quad (\text{F.11})$$

où m_0 est la masse nue de l'électron, et $n_{\text{él.}}$ est la densité électronique. On a donc

$$E_c = 20 \times B(T) \text{ K} = 1,7 \times B(T) \text{ meV} \quad (\text{F.12})$$

$$V = 50,5 \times \sqrt{B(T)} \text{ K} = 4,3 \times \sqrt{B(T)} \text{ meV} \quad (\text{F.13})$$

$$E_z = 0,3 \times B(T) \text{ K} = 0,026 \times B(T) \text{ meV} \quad (\text{F.14})$$

et

$$a_B^* \simeq 10,2 \text{ nm} \quad r_s \simeq 2. \quad (\text{F.15})$$

Gap de sous-bande :

$$\Delta_{\text{SAS}} = 1128 \times \frac{m_0/m^*}{w^2(\text{nm})} \text{ meV} = \frac{16835}{w^2(\text{nm})} \text{ meV} = 25,7 \frac{B(T)}{(w/l_B)^2} \text{ meV} \quad (\text{F.16})$$

$$\text{Masse effective des trous lourds} \quad m_0/m_{HH}^z \simeq 2,65 \quad m_0/m_{HH}^{xy} \simeq 10,05$$

$$\text{Masse effective des trous légers} \quad m_0/m_{LH}^z \simeq 7,95 \quad m_0/m_{LH}^{xy} \simeq 5,75$$

Conversion à taille finie

Pour un système de taille finie (nombre de quanta de flux N_B) et pour un « shift » topologique δ , la longueur magnétique à taille finie l_B^F est reliée à son homologue à la limite thermodynamique par

$$l_B^F = \sqrt{1 - \delta/N_B} l_B. \quad (\text{F.17})$$

De même pour l'énergie on a

$$E_c^F = e^2 / (4\pi\epsilon l_B^F). \quad (\text{F.18})$$

Ainsi, pour convertir une énergie exprimée en unités de l'énergie de Coulomb à taille finie en son homologue à la limite thermodynamique, on doit donc multiplier celle-ci par

$$\frac{E_c^F}{E_c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta/N_B}} \quad (\text{F.19})$$

Constantes

Charge élémentaire :

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{F.20})$$

Constante de Boltzmann :

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (\text{F.21})$$

Permittivité diélectrique du vide :

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (\text{F.22})$$

Constante de Planck :

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ kg} \times \text{m}^2/\text{s} \quad (\text{F.23})$$

Masse nue de l'électron :

$$m_0 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (\text{F.24})$$

Magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad (\text{F.25})$$

Rayon de Bohr :

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \simeq 52,92 \text{ pm} \quad (\text{F.26})$$

Constante r_s (rayon typique de la sphère qui englobe un électron en moyenne) :

$$\frac{\Omega d}{d} (r_s a_B)^d = \frac{1}{n} \quad (\text{F.27})$$

soit, à deux dimensions,

$$r_s a_B = (\pi n)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{F.28})$$

Formules utiles

La fonction d'onde à deux corps dans la jauge symétrique dans le plus bas NL s'écrit (m et M sont les moments cinétiques relatif et total, respectivement)

$$\psi_{0,m,M}(z, Z) = \frac{1}{2\pi l_B^2} \sqrt{\frac{1}{2^m m! 2^M M!}} z^m e^{-\frac{|z|^2}{8l_B^2}} Z^M e^{-\frac{|Z|^2}{2l_B^2}}. \quad (\text{F.29})$$

Les pseudopotentiels de Haldane dans le plus bas NL sont donnés par

$$V_m = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{m!}. \quad (\text{F.30})$$

Bibliographie

- [ADG⁺88] E. Y. ANDREI, G. DEVILLE, D. C. GLATTLI, F. I. B. WILLIAMS, E. PARIS et B. ETIENNE : Observation of a magnetically induced wigner solid. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2765–2768, Jun 1988.
- [AS10] Alexander ALTLAND et Ben D SIMONS : *Condensed matter field theory*. Cambridge University Press, 2010.
- [B88] M. BÜTTIKER : Absence of backscattering in the quantum hall effect in multiprobe conductors. *Phys. Rev. B*, 38:9375–9389, Nov 1988.
- [BH08] B. Andrei BERNEVIG et F. D. M. HALDANE : Model fractional quantum hall states and jack polynomials. *Phys. Rev. Lett.*, 100:246802, Jun 2008.
- [BM77] Lynn BONSALE et A. A. MARADUDIN : Some static and dynamical properties of a two-dimensional wigner crystal. *Phys. Rev. B*, 15:1959–1973, Feb 1977.
- [BPDS13] J. BIDDLE, Michael R. PETERSON et S. DAS SARMA : Variational monte carlo study of spin-polarization stability of fractional quantum hall states against realistic effects in half-filled landau levels. *Phys. Rev. B*, 87:235134, Jun 2013.
- [BR09] B Andrei BERNEVIG et N REGNAULT : Anatomy of abelian and non-abelian fractional quantum hall states. *Physical review letters*, 103(20):206801, 2009.
- [CF00] Rene COTE et HA FERTIG : Collective modes of quantum hall stripes. *Physical Review B*, 62(3):1993, 2000.
- [CHM86] S. T. CHUI, T. M. HAKIM et K. B. MA : Solid versus fluid, and the interplay between fluctuations, correlations, and exchange in the fractional quantized hall effect. *Phys. Rev. B*, 33:7110–7121, May 1986.
- [CJ04] C.-C CHANG et J. K. JAIN : Microscopic origin of the next-generation fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 92:196806, May 2004.
- [CLE⁺03] Yong CHEN, R. M. LEWIS, L. W. ENGEL, D. C. TSUI, P. D. YE, L. N. PFEIFFER et K. W. WEST : Microwave resonance of the 2d wigner crystal around integer landau fillings. *Phys. Rev. Lett.*, 91:016801, Jul 2003.
- [CTDL73] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU et F. LALOË : *Mécanique Quantique*. Hermann, 1973.
- [DTS⁺99] R.R. DU, D.C. TSUI, H.L. STORMER, L.N. PFEIFFER, K.W. BALDWIN et K.W. WEST : Strongly anisotropic transport in higher two-dimensional landau levels. *Solid State Communications*, 109(6):389 – 394, 1999.
- [EBP⁺92] J. P. EISENSTEIN, G. S. BOEBINGER, L. N. PFEIFFER, K. W. WEST et Song He : New fractional quantum hall state in double-layer two-dimensional electron systems. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1383–1386, Mar 1992.
- [EC90] Keivan ESFAJANI et S. T. CHUI : Solidification of the two-dimensional electron gas in high magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 42:10758–10760, Dec 1990.

- [EDK⁺06] A. ETTOUHAMI, C. DOIRON, F. KLIRONOMOS, R. CÔTÉ et Alan DORSEY : Anisotropic states of two-dimensional electrons in high magnetic fields. *Phys. Rev. Lett.*, 96:196802, May 2006.
- [EK95] Keivan ESFARJANI et Yoshiyuki KAWAZOE : A bilayer of wigner crystal in the harmonic approximation. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 7(36):7217, 1995.
- [ELS⁺97] LW ENGEL, C-C LI, D SHAHAR, DC TSUI et M SHAYEGAN : Microwave resonances in low-filling insulating phase of two-dimensional electron system. *Solid state communications*, 104(3):167–171, 1997.
- [EPW90] JP EISENSTEIN, LN PFEIFFER et KW WEST : Independently contacted two-dimensional electron systems in double quantum wells. *Applied physics letters*, 57(22):2324–2326, 1990.
- [Fer99] H. A. FERTIG : Unlocking transition for modulated surfaces and quantum hall stripes. *Phys. Rev. Lett.*, 82:3693–3696, May 1999.
- [FK97] MM FOGLER et AA KOULAKOV : Laughlin liquid to charge-density-wave transition at high landau levels. *Physical Review B*, 55(15):9326, 1997.
- [FKS96] MM FOGLER, AA KOULAKOV et BI SHKLOVSKII : Ground state of a two-dimensional electron liquid in a weak magnetic field. *Physical Review B*, 54(3):1853, 1996.
- [FOC86] G. FANO, F. ORTOLANI et E. COLOMBO : Configuration-interaction calculations on the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. B*, 34:2670–2680, Aug 1986.
- [Fog02] M. M. FOGLER : Stripe and bubble phases in quantum hall systems. In C. BERTHIER, L. P. LÉVY et G. MARTINEZ, éditeurs : *High Magnetic Fields*, volume 595 de *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pages 98–138, 2002.
- [FPA79] H. FUKUYAMA, P. M. PLATZMAN et P. W. ANDERSON : Two-dimensional electron gas in a strong magnetic field. *Phys. Rev. B*, 19:5211–5217, May 1979.
- [FW08] Barry FRIEDMAN et Candice WITHROW : Stripes or an anisotropic wigner crystal in the n=2 landau level? *Physica B : Condensed Matter*, 403(5–9):1500 – 1501, 2008. Proceedings of the International Conference on Strongly Correlated Electron Systems.
- [GA79] CC GRIMES et G ADAMS : Evidence for a liquid-to-crystal phase transition in a classical, two-dimensional sheet of electrons. *Physical Review Letters*, 42(12):795, 1979.
- [GFN97] V GURARIE, M FLOHR et C NAYAK : The haldane-rezayi quantum hall state and conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 498(3):513–538, 1997.
- [Gir99] Steven M GIRVIN : The quantum hall effect. Rapport technique, 1999.
- [GJ84] S. M. GIRVIN et Terrence JACH : Formalism for the quantum hall effect : Hilbert space of analytic functions. *Phys. Rev. B*, 29:5617–5625, May 1984.
- [GLMS03] M. O. GOERBIG, P. LEDERER et C. MORAIS SMITH : Microscopic theory of the reentrant integer quantum hall effect in the first and second excited landau levels. *Phys. Rev. B*, 68:241302, Dec 2003.
- [GLMS04] M. O. GOERBIG, P. LEDERER et C. MORAIS SMITH : Competition between quantum-liquid and electron-solid phases in intermediate landau levels. *Phys. Rev. B*, 69:115327, Mar 2004.
- [GLS04a] M. O. GOERBIG, P. LEDERER et C. MORAIS SMITH : Erratum : Second generation of composite fermions in the hamiltonian theory [phys. rev. b 69, 155324 (2004)]. *Phys. Rev. B*, 70:249903, Dec 2004.
- [GLS04b] M. O. GOERBIG, P. LEDERER et C. MORAIS SMITH : Second generation of composite fermions in the hamiltonian theory. *Phys. Rev. B*, 69:155324, Apr 2004.
- [Goe09] M. O. GOERBIG : Quantum hall effects. *ArXiv e-prints*, septembre 2009.
- [Gre11] Martin GREITER : *Mapping of parent Hamiltonians : from Abelian and non-Abelian quantum Hall states to exact models of critical spin chains*, volume 244. Springer Verlag, 2011.

- [GS03] MO GOERBIG et C Morais SMITH : Scaling approach to the phase diagram of quantum hall systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 63(5):736, 2003.
- [GSJ94] V. J. GOLDMAN, B. SU et J. K. JAIN : Detection of composite fermions by magnetic focusing. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2065–2068, Mar 1994.
- [GV05] G. GIULIANI et G VIGNALE : *Quantum theory of the electron liquid*. Cambridge University Press, 2005.
- [GWW91] Martin GREITER, Xiao-Gang WEN et Frank WILCZEK : Paired hall state at half filling. *Physical review letters*, 66(24):3205, 1991.
- [Hal79] E. H. HALL : On a new action of the magnet on electric currents. *American Journal of Mathematics*, 2:287–92, 1879.
- [Hal82] B. I. HALPERIN : Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev. B*, 25:2185–2190, Feb 1982.
- [Hal83a] F. D. M. HALDANE : Fractional quantization of the hall effect : A hierarchy of incompressible quantum fluid states. *Phys. Rev. Lett.*, 51:605–608, Aug 1983.
- [Hal83b] Bertrand I HALPERIN : Theory of the quantized hall conductance. *Helv. Phys. Acta*, 56(1-3):75, 1983.
- [HLR93] B. I. HALPERIN, Patrick A. LEE et Nicholas READ : Theory of the half-filled landau level. *Phys. Rev. B*, 47:7312–7343, Mar 1993.
- [HPW13] Jian HUANG, LN PFEIFFER et KW WEST : Evidence for a two-dimensional quantum wigner solid in zero magnetic field. *arXiv preprint arXiv :1306.4196*, 2013.
- [HQW⁺08] David HSIEH, Dong QIAN, Lewis WRAY, YuQi XIA, Yew San HOR, RJ CAVA et M Zahid HASAN : A topological dirac insulator in a quantum spin hall phase. *Nature*, 452(7190):970–974, 2008.
- [HR88] F. D. M. HALDANE et E. H. REZAYI : Spin-singlet wave function for the half-integral quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 60:956–959, Mar 1988.
- [Jai89] J. K. JAIN : Composite-fermion approach for the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 63:199–202, Jul 1989.
- [Jai07] J.K. JAIN : *Composite Fermions*. Cambridge University Press, 2007.
- [JPacBS14] Sonika JOHRI, Z. Papić, R. N. BHATT et P. SCHMITTECKERT : Quasiholes of $\frac{1}{3}$ and $\frac{7}{3}$ quantum hall states : Size estimates via exact diagonalization and density-matrix renormalization group. *Phys. Rev. B*, 89:115124, Mar 2014.
- [JSI⁺89] H. W. JIANG, H. L. STORMER, D. C. ISUI, L. N. PFEIFFER et K. W. WEST : Transport anomalies in the lowest landau level of two-dimensional electrons at half-filling. *Phys. Rev. B*, 40:12013–12016, Dec 1989.
- [KDP80] K. v. KLITZING, G. DORDA et M. PEPPER : New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494–497, Aug 1980.
- [KEPW04] M. KELLOGG, J. EISENSTEIN, L. PFEIFFER et K. WEST : Vanishing hall resistance at high magnetic field in a double-layer two-dimensional electron system. *Phys. Rev. Lett.*, 93:036801, Jul 2004.
- [KFS96] AA KOULAKOV, MM FOGLER et BI SHKLOVSKII : Charge density wave in two-dimensional electron liquid in weak magnetic field. *Physical review letters*, 76(3):499, 1996.
- [Koh85] Mahito KOHMOTO : Topological invariant and the quantization of the hall conductance. *Annals of Physics*, 160(2):343 – 354, 1985.
- [Kra06] Werner KRAUTH : *Statistical mechanics : algorithms and computations*, volume 13. Oxford University Press, 2006.

- [KSP⁺93] W. KANG, H. L. STORMER, L. N. PFEIFFER, K. W. BALDWIN et K. W. WEST : How real are composite fermions? *Phys. Rev. Lett.*, 71:3850–3853, Dec 1993.
- [Lan50] Cornelius LANCZOS : *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*. United States Governm. Press Office, 1950.
- [Lau81] R. B. LAUGHLIN : Quantized hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B*, 23:5632–5633, May 1981.
- [Lau83a] R. B. LAUGHLIN : Anomalous quantum hall effect : An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1395–1398, May 1983.
- [Lau83b] R. B. LAUGHLIN : Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field. *Phys. Rev. B*, 27:3383–3389, Mar 1983.
- [LCE⁺99] M. P. LILLY, K. B. COOPER, J. P. EISENSTEIN, L. N. PFEIFFER et K. W. WEST : Evidence for an anisotropic state of two-dimensional electrons in high landau levels. *Phys. Rev. Lett.*, 82:394–397, Jan 1999.
- [LF91] Ana LOPEZ et Eduardo FRADKIN : Fractional quantum hall effect and chern-simons gauge theories. *Phys. Rev. B*, 44:5246–5262, Sep 1991.
- [LG84] Pui K LAM et SM GIRVIN : Liquid-solid transition and the fractional quantum-hall effect. *Physical Review B*, 30(1):473, 1984.
- [LPT⁺08] D. R. LUHMAN, W. PAN, D. C. TSUI, L. N. PFEIFFER, K. W. BALDWIN et K. W. WEST : Observation of a fractional quantum hall state at $\nu = 1/4$ in a wide gas quantum well. *Phys. Rev. Lett.*, 101:266804, Dec 2008.
- [LWM84] D. LEVESQUE, J. J. WEIS et A. H. MACDONALD : Crystallization of the incompressible quantum-fluid state of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field. *Phys. Rev. B*, 30:1056–1058, Jul 1984.
- [LYE⁺02] R. M. LEWIS, P. D. YE, L. W. ENGEL, D. C. TSUI, L. N. PFEIFFER et K. W. WEST : Microwave resonance of the bubble phases in $1/4$ and $3/4$ filled high landau levels. *Phys. Rev. Lett.*, 89:136804, Sep 2002.
- [Mac94] AH MACDONALD : Introduction to the physics of the quantum hall regime. *arXiv preprint cond-mat/9410047*, 1994.
- [MacR96] M. Milovanović et N. READ : Edge excitations of paired fractional quantum hall states. *Phys. Rev. B*, 53:13559–13582, May 1996.
- [Max81] James Clerk MAXWELL : *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1881.
- [MC96] R. MOESSNER et J. T. CHALKER : Exact results for interacting electrons in high landau levels. *Phys. Rev. B*, 54:5006–5015, Aug 1996.
- [Md95] R. MORF et N. D'AMBRUMENIL : Stability and effective masses of composite fermions in the first and second landau level. *Phys. Rev. Lett.*, 74:5116–5119, Jun 1995.
- [MH86] R MORF et BI HALPERIN : Monte carlo evaluation of trial wave functions for the fractional quantized hall effect : Disk geometry. *Physical Review B*, 33(4):2221, 1986.
- [MMY⁺95] K. MOON, H. MORI, Kun YANG, S. M. GIRVIN, A. H. MACDONALD, L. ZHENG, D. YOSHIOKA et Shou-Cheng ZHANG : Spontaneous interlayer coherence in double-layer quantum hall systems : Charged vortices and kosterlitz-thouless phase transitions. *Phys. Rev. B*, 51:5138–5170, Feb 1995.
- [Mor98] R. H. MORF : Transition from quantum hall to compressible states in the second landau level : New light on the $\nu = 5/2$ enigma. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1505–1508, Feb 1998.
- [MR91] Gregory MOORE et Nicholas READ : Nonabelions in the fractional quantum hall effect. *Nuclear Physics B*, 360(2):362–396, 1991.

- [MRR⁺53] Nicholas METROPOLIS, Arianna W ROSENBLUTH, Marshall N ROSENBLUTH, Augusta H TELLER et Edward TELLER : Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6):1087–1092, 1953.
- [MS03] Ganpathy MURTHY et R. SHANKAR : Hamiltonian theories of the fractional quantum hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 75:1101–1158, Oct 2003.
- [MSK94] H. C. MANOHARAN, M. SHAYEGAN et S. J. KLEPPER : Signatures of a novel fermi liquid in a two-dimensional composite particle metal. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3270–3273, Dec 1994.
- [MYG89] A. H. MACDONALD, D. YOSHIOKA et S. M. GIRVIN : Comparison of models for the even-denominator fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. B*, 39:8044–8047, Apr 1989.
- [MZ83] Kazumi MAKI et Xenophon ZOROS : Static and dynamic properties of a two-dimensional wigner crystal in a strong magnetic field. *Phys. Rev. B*, 28:4349–4356, Oct 1983.
- [NH95] Subha NARASIMHAN et Tin-Lun Ho : Wigner-crystal phases in bilayer quantum hall systems. *Phys. Rev. B*, 52:12291–12306, Oct 1995.
- [NSS⁺08] Chetan NAYAK, Steven H. SIMON, Ady STERN, Michael FREEDMAN et Sankar DAS SARMA : Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1083–1159, Sep 2008.
- [PacGRMac10] Z. Papić, M. O. GOERBIG, N. REGNAULT et M. V. Milovanović : Tunneling-driven breakdown of the 331 state and the emergent pfaffian and composite fermi liquid phases. *Phys. Rev. B*, 82:075302, Aug 2010.
- [PDS10] Michael R. PETERSON et S. DAS SARMA : Quantum hall phase diagram of half-filled bilayers in the lowest and the second orbital landau levels : Abelian versus non-abelian incompressible fractional quantum hall states. *Phys. Rev. B*, 81:165304, Apr 2010.
- [PJDS08] Michael. R. PETERSON, Th. JOLICOEUR et S. DAS SARMA : Finite-layer thickness stabilizes the pfaffian state for the 5/2 fractional quantum hall effect : Wave function overlap and topological degeneracy. *Phys. Rev. Lett.*, 101:016807, Jul 2008.
- [PMABJ98] K. PARK, V. MELIK-ALAVERDIAN, N. E. BONESTEEL et J. K. JAIN : Possibility of p-wave pairing of composite fermions at $\nu = 1/2$. *Phys. Rev. B*, 58:R10167–R10170, Oct 1998.
- [PMM⁺09] Z. PAPIĆ, G. MÖLLER, M. V. MILOVANOVIĆ, N. REGNAULT et M. O. GOERBIG : Fractional quantum hall state at $\nu = \frac{1}{4}$ in a wide quantum well. *Phys. Rev. B*, 79:245325, Jun 2009.
- [PN13] Michael PETERSON et Chetan NAYAK : More realistic hamiltonians for the fractional quantum hall regime in gaas and graphene. *Phys. Rev. B*, 87:245129, Jun 2013.
- [PPacDS10] Michael R. PETERSON, Z. Papić et S. DAS SARMA : Fractional quantum hall effects in bilayers in the presence of interlayer tunneling and charge imbalance. *Phys. Rev. B*, 82:235312, Dec 2010.
- [PST⁺03] W. PAN, H. L. STORMER, D. C. TSUI, L. N. PFEIFFER, K. W. BALDWIN et K. W. WEST : Fractional quantum hall effect of composite fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 90:016801, Jan 2003.
- [RH00] E. H. REZAYI et F. D. M. HALDANE : Incompressible paired hall state, stripe order, and the composite fermion liquid phase in half-filled landau levels. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4685–4688, May 2000.
- [RR94] E. REZAYI et N. READ : Fermi-liquid-like state in a half-filled landau level. *Phys. Rev. Lett.*, 72:900–903, Feb 1994.
- [RR96] N. READ et E. REZAYI : Quasiholes and fermionic zero modes of paired fractional quantum hall states : The mechanism for non-abelian statistics. *Phys. Rev. B*, 54:16864–16887, Dec 1996.
- [Sén00] David SÉNÉCHAL : Mécanique quantique. *Université de Sherbrooke*, 2000.
- [SEPW00] I. SPIELMAN, J. EISENSTEIN, L. PFEIFFER et K. WEST : Resonantly enhanced tunneling in a double layer quantum hall ferromagnet. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5808–5811, Jun 2000.

- [SES⁺92] Y. W. SUEN, L. W. ENGEL, M. B. SANTOS, M. SHAYEGAN et D. C. TSUI : Observation of a $\nu=1/2$ fractional quantum hall state in a double-layer electron system. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1379–1382, Mar 1992.
- [SGCS09] J. SHABANI, T. GOKMEN, Y. T. CHIU et M. SHAYEGAN : Evidence for developing fractional quantum hall states at even denominator $1/2$ and $1/4$ fillings in asymmetric wide quantum wells. *Phys. Rev. Lett.*, 103:256802, Dec 2009.
- [SGJE97] L. SAMINADAYAR, DC GLATTLI, Y. JIN et B. ETIENNE : Observation of the $e/3$ fractionally charged Laughlin quasiparticle. *Physical Review Letters*, 79(13):2526, 1997.
- [SGS09] J. SHABANI, T. GOKMEN et M. SHAYEGAN : Correlated states of electrons in wide quantum wells at low fillings : The role of charge distribution symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 103:046805, Jul 2009.
- [SJ01] V. W. SCAROLA et J. K. JAIN : Phase diagram of bilayer composite fermion states. *Phys. Rev. B*, 64:085313, Aug 2001.
- [SLS⁺13] J. SHABANI, Yang LIU, M. SHAYEGAN, L. N. PFEIFFER, K. W. WEST et K. W. BALDWIN : Phase diagrams for the stability of the fractional quantum hall effect in electron systems confined to symmetric, wide GaAs quantum wells. *Phys. Rev. B*, 88:245413, Dec 2013.
- [SM13] I. SODEMANN et A. MACDONALD : Landau level mixing and the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. B*, 87:245425, Jun 2013.
- [SMPT10] V. W. SCAROLA, C. MAY, M. R. PETERSON et M. TROYER : Subband engineering even-denominator quantum hall states. *Phys. Rev. B*, 82:121304, Sep 2010.
- [SMY⁺94] Y. W. SUEN, H. C. MANOHARAN, X. YING, M. B. SANTOS et M. SHAYEGAN : Origin of the $\nu=1/2$ fractional quantum hall state in wide single quantum wells. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3405–3408, May 1994.
- [Sou14] P. SOULÉ : *Étude des Bords des Phases de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire dans la Géométrie d'un Contact Ponctuel Quantique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2014.
- [SP08] Sankar Das SARMA et Aron PINCZUK : *Perspectives in quantum hall effects : Novel quantum liquids in low-dimensional semiconductor structures*. John Wiley & Sons, 2008.
- [SR13] Steven SIMON et Edward REZAYI : Landau level mixing in the perturbative limit. *Phys. Rev. B*, 87:155426, Apr 2013.
- [SSS92] YW SUEN, MB SANTOS et M SHAYEGAN : Correlated states of an electron system in a wide quantum well. *Physical review letters*, 69(24):3551, 1992.
- [STG99] Horst L. STORMER, Daniel C. TSUI et Arthur C. GOSSARD : The fractional quantum hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S298–S305, Mar 1999.
- [Tam32] IE TAMM : A possible kind of electron binding on crystal surfaces. *Z. Phys.*, 76:849–850, 1932.
- [TC89] B. TANATAR et D. M. CEPERLEY : Ground state of the two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 39:5005–5016, Mar 1989.
- [TERB11a] Ronny THOMALE, Benoît ESTIENNE, Nicolas REGNAULT et B. Andrei BERNEVIG : Decomposition of fractional quantum hall model states : Product rule symmetries and approximations. *Phys. Rev. B*, 84:045127, Jul 2011.
- [TERB11b] Ronny THOMALE, Benoît ESTIENNE, Nicolas REGNAULT et B. Andrei BERNEVIG : Decomposition of fractional quantum hall model states : Product rule symmetries and approximations. *Phys. Rev. B*, 84:045127, Jul 2011.
- [TGR14] N. THIEBAUT, M. O. GOERBIG et N. REGNAULT : Two-component fractional quantum hall effect in the half-filled lowest Landau level in an asymmetric wide quantum well. *Phys. Rev. B*, 89:195421, May 2014.
- [TKNdN82] D. J. THOULESS, M. KOHMOTO, M. P. NIGHTINGALE et M. den NIJS : Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, Aug 1982.

- [TmHJ07] Csaba TÖKE et J. K. JAIN : Theoretical study of even denominator fractions in graphene : Fermi sea versus paired states of composite fermions. *Phys. Rev. B*, 76:081403, Aug 2007.
- [TPJJ05] Csaba TÖKE, Michael R. PETERSON, Gun Sang JEON et Jainendra K. JAIN : Fractional quantum hall effect in the second landau level : The importance of inter-composite-fermion interaction. *Phys. Rev. B*, 72:125315, Sep 2005.
- [TRG13] N THIEBAUT, N REGNAULT et MO GOERBIG : Fractional quantum hall states in charge-imbalanced bilayer systems. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 456, page 012036. IOP Publishing, 2013.
- [TSG82] D. C. TSUI, H. L. STORMER et A. C. GOSSARD : Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559–1562, May 1982.
- [TSH04] E. TUTUC, M. SHAYEGAN et D. HUSE : Counterflow measurements in strongly correlated gaas hole bilayers : Evidence for electron-hole pairing. *Phys. Rev. Lett.*, 93:036802, Jul 2004.
- [vNU51] John von NEUMANN et Stanislaw ULAM : Monte carlo method. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, 12:36, 1951.
- [WES⁺87] R. WILLETT, J. P. EISENSTEIN, H. L. STÖRMER, D. C. TSUI, A. C. GOSSARD et J. H. ENGLISH : Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1776–1779, Oct 1987.
- [Wig34] E. WIGNER : On the interaction of electrons in metals. *Phys. Rev.*, 46:1002–1011, Dec 1934.
- [Win03] Roland WINKLER : *Spin-orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Numéro 191. Springer, 2003.
- [WPR⁺90] R. L. WILLETT, M. A. PAALANEN, R. R. RUEL, K. W. WEST, L. N. PFEIFFER et D. J. BISHOP : Anomalous sound propagation at $\nu=1/2$ in a 2d electron gas : Observation of a spontaneously broken translational symmetry? *Phys. Rev. Lett.*, 65:112–115, Jul 1990.
- [WRWP93] R. L. WILLETT, R. R. RUEL, K. W. WEST et L. N. PFEIFFER : Experimental demonstration of a fermi surface at one-half filling of the lowest landau level. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3846–3849, Dec 1993.
- [YF79] Daijiro YOSHIOKA et Hidetoshi FUKUYAMA : Charge density wave state of two-dimensional electrons in strong magnetic fields. *J. Phys. Soc. Jap*, 47:394, 1979.
- [YFC00] Hangmo Yi, HA FERTIG et R CÔTÉ : Stability of the smectic quantum hall state : A quantitative study. *Physical review letters*, 85(19):4156, 2000.
- [YHR01] Kun YANG, FDM HALDANE et EH REZAYI : Wigner crystals in the lowest landau level at low-filling factors. *Physical Review B*, 64(8):081301, 2001.
- [YL83] D. YOSHIOKA et P. A. LEE : Ground-state energy of a two-dimensional charge-density-wave state in a strong magnetic field. *Phys. Rev. B*, 27:4986–4996, Apr 1983.
- [Yos02] D. YOSHIOKA : *The Quantum Hall Effect*. Springer, 2002.
- [ZJ07] C.-H. ZHANG et Yogesh N. JOGLEKAR : Wigner crystal and bubble phases in graphene in the quantum hall regime. *Phys. Rev. B*, 75:245414, Jun 2007.